الاحصاء الوصفي والتحليلي
مع
استخدام البرامج الجاهزة

تأليف

الدكتور
عبدالحميد محمد نجم

الدكتور
محمد عبدالهادي المحميد

جامعة الكويت



الطبعة الاولى
١٩٨٨م - ١٤٠٨هـ

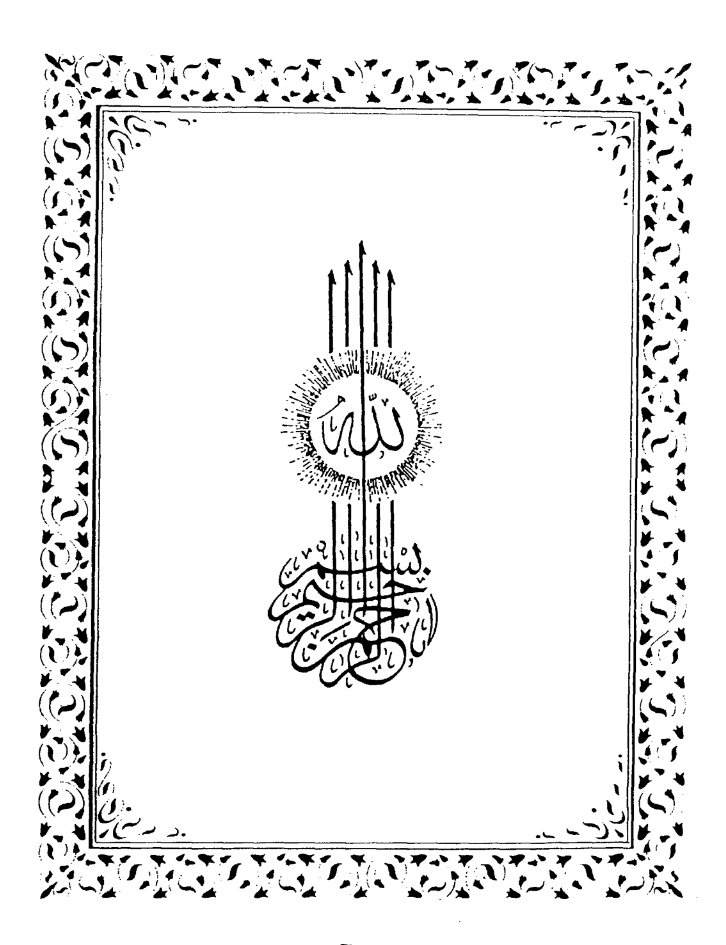
الاحصاء الوصفي والتحليلي
مع
استخدام البرامج الجاهزة

تأليف

الدكتور
عبدالحميد محمد نجم

الدكتور
محمد عبدالهادي المحميد

الطبعة الأولى
١٩٨٨


الله
بسم الله الرحمن الرحيم

« مقـــدمـــة »

يهـدف هذا الكتـاب إلى عرض لمبادىء علم الاحصاء بـأسلوب مبسط وإلى تعميق وشـرح المقـاييس الاحصـائيـة المختلفـة ، وكـذلـك إلى دراسـة بعض طـرق التحليل الاحصـائي بالإضـافـة إلى تـوضيـح استخـدام البـرامـج الجاهزة في تحليل البيانـات الاحصائيـة وذلك لمـواكبة التـطور الذي طـرأ في هذا المجال .

وبجـانب اهتمامنـا بالمسـاهمـة في مـوضـوعـات هـذا الكتـاب ليخـدم القارىء المستخدم للأسلوب الاحصائي في تحليل البيانـات إلاَّ أننا راعينـا أن تخـدم فصـول هـذا الكتـاب مقـررين أسـاسيين من مقـررات الاحصـاء والتي تقدمها كليات التجارة وهي :

١ ـ **الاحصاء الوصفي**

٢ ـ **الاحصاء للتجاريين (الاحصاء التطبيقي) .**

ويمكن تقسيم هذا الكتاب إلى ثلاثة أجزاء رئيسية :

أ ـ المقـدمة مـع التحليل الاحصـائي لمتغير واحـد ويشتمـل هـذا الجـزء على الفصـول الستة الأولى وهي المقـدمة ، التـوزيعات التكـراريـة ، التمثيل البياني ، مقاييس النزعة المركزية ، مقـاييس التشتت والالتواء بالإضافة إلى الأرقام القياسية حيث تمثـل تطبيقـاً على مقاييس النـزعة

المركزية ولأنها تهتم بمتغير واحد فقط كالأسعار أو الكميات أو الأوزان (القيم) .

ب - التحليل الاحصائي في حالة متغيرين ، ويشتمل على بقية فصول الكتاب وهي موضوعات الارتباط ، والانحدار الخطي ، تحليل السلاسل الزمنية ، مبادىء نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ثم تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض الاحصائية .

جـ - استخدام البرامج الجاهزة في تحليل البيانات الاحصائية في الفصل الأخير من الكتاب .

ولقد راعينا أن يكون الكتاب موجزاً بحيث يتناسب مع الوقت المخصص لهذه الموضوعات وأن يكون بسيطاً ومدعماً بالأمثلة التطبيقية حتى يتيسر فهمه ويتمشى مع مستوى استعداد القارىء في الأساليب الرياضية .

ولا يفوتنا أن نقدم الشكر إلى لجنة البحوث والتدريب بكلية التجارة جامعة الكويت على مساهمتها الجزئية في إصدار الطبعة الأولى من هذا الكتاب .

والله ولي التوفيق ،

الكويت ١٩٨٨

الفهــرس

الفصل الاول: مقدمة

الصفحة

الفصل الرابع : مقاييس النزعة المركزية

الفصل الخامس : مقاييس التشتت والالتواء

الفصل السادس: الارقام القياسية

الصفحة

الفصل السابع : الارتباط

الفصل الثامن : الانحدار الخطي

الفصل التاسع : تحليل السلاسل الزمنية

الصفحة

الفصل العاشر: مبادىء نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

الفصل الحادي عشر: تقدير فترات الثقة واختبارات الفروض الاحصائية

الفصل الثاني عشر: استخدام البرامج الاحصائية الجاهزة في تحليل البيانات

الصفحة

الملحق: الجداول الاحصائية

الفصل الأول
مقـدمـة

تعريف علم الاحصاء Statistics

إذا أخـذنا الاستخـدام كمعيـار لتعـريف علم الاحصـاء فنجـد أن هنـاك تعريفين أحدهما قديم والآخـر حديث ، والتعـريف القديم لـلاحصاء هـو علم الحصـر أو العد « Science of Counting » حيث كـان هدف الـدولـة قـديمـاً حصر عدد السكان وذلك لأغراض محددة مثـل تحديـد حجم دافعي الضرائب وتقـديـر حجم القــوة البشـريــة التي يمكن استخـدامهـا للدفـاع عن أراضي الدولة . وهذا التعريف لا يختلف كثيـراً عن التعريف الـذي يستخدمـه العامـة حتى الآن حيث يُعرفون الاحصاء بأنه جمع بيانات عن المجموعات والظواهر المختلفة والتعبير عنها في صورة رقمية . ولكن جمع البيـانات لا يكـون غايـة نسعى إليهـا ، بل مـا هي في الواقـع إلاّ وسيلة نبغي من ورائها تحقيق هـدف معيّن ، وهـذا الهدف يكـون عادة وصف الـظواهر المختلفـة لدراسـة طـريقـة تغيرها أو مقارنتها بظواهر أخرى بغية استنباط العلاقة التي تربط بينهم .

ومع استخدام الاحصاء الآن في جميع المجـالات فلا نجـد اليوم علمـاً لا يعتمد في تحليله على الأساليب الاحصـائية وعليـه نتفق مع الـذين يعرفـون علم الاحصـاء بأنـه أحد العلوم الاجتمـاعيـة الـذي يبحث في أسـاليب جمـع وعـرض البيانـات من أجل الـوصـول إلى نـوع من المعـرفـة (أو اتخـاذ قـرار معيّن) المبنيــة على أسس رقميـة للظاهــرة محـل الــدراسـة بمعنى أن علم

الاحصاء هو مجموعة الأساليب والنظريات العلمية التي تهدف إلى جمع وتلخيص ووصف وتحليل البيانات عن الظواهر المختلفة واستخدام النتائج في التنبؤ واتخاذ القرار .

ومع تطور الرياضيات ونظرية الاحتمالات في منتصف القرن الثامن عشر أصبح علم الاحصاء يمتلك من الأسس والمبادىء والنظريات المختلفة التي تساعد في التخطيط ورسم السياسات واتخاذ القرارات في شتى المجالات ومعها تطور علم الاحصاء من علم وصفي يقوم بجمع وعرض البيانات إلى علم تحليلي يقوم على التنبؤ بقيم الظواهر في المستقبل وتقدير واستنباط خصائص المجتمع عن طريق سخب عينة من هذا المجتمع ودراسة خصائصها وتعميم نتائجها على المجتمع مما يوفر الوقت والتكاليف .

ومع تطور استخدام الكمبيوتر وانتشار الحاسب الشخصي والبرامج الجاهزة Software أصبح من الميسور على كثير من غير المتخصصين في الاحصاء استخدام الأساليب الاحصائية سواء في تحليل البيانات وحساب المقاييس المختلفة التي تساعد على التنبؤ واتخاذ القرار العلمي السليم .

ومن ثم يمكن تقسيم علم الاحصاء إلى قسمين أساسيين :

الاحصاء الوصفي Descriptive Statistics :

وهو الذي يقوم على جمع وعرض البيانات بغرض اظهار خصائصها المختلفة .

الاحصاء التحليلي أو الاستدلالي Statistical Inference :

وهو الذي يقوم على تعميم نتائج الجزء على الكل . عن طريق استخدام جزء من المجموعة ودراسة خصائصها ، ثم تقدير واستنتاج

خصائص المجموعة كلها باستخدام تلك النتائج التي حصلنا عليها من العينة .

وسوف تتركز دراستنا على الاحصاء الوصفي التي تبدأ بعملية جمع البيانات ووسائل تحليلها سواء باستخدام الجداول التكرارية أو الرسوم البيانية ، أو أحد المقاييس الاحصائية سواء كنا نعالج متغيراً واحداً أو متغيرين .

أما بالنسبة للاحصاء الاستدلالي فسوف نستعرض بعض أدواته في التحليل مثل التوزيعات الاحتمالية واختبارات الفروض الاحصائية هذا بالإضافة إلى بعض الدراسات التطبيقية التي تخدم القارىء في مجالات مختلفة . وهناك فصل خاص عن استخدام البرامج الجاهزة في حل المشاكل الاحصائية والذي يغطي التطور الذي طرأ في هذا المجال .

مراحل البحث الاحصائي

سوف نلخص في هذه المرحلة الخطوات الرئيسية التي يجب أن يفكر فيها أي باحث عند إجراء بحث معيّن يهدف من وراء القيام به دراسة تأثير مؤثر أو عدة مؤثرات على ظاهرة معينة وعلاقة ذلك بالظواهر الأخرى وأمثلة ذلك الدراسات السكانية التي تقوم على دراسة معدلات الخصوبة ودراسة علاقته بالمستوى الثقافي والتعليمي كذلك أبحاث رجال التأمين لدراسة مدى اقبال الناس على التأمين على الحياة وعلاقة ذلك بمستوى الوعي الثقافي والحضاري ودخل الفرد .

وتتلخص مراحل البحث الاحصائي فيما يلي :

أ ـ تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض الاحصائية :

المقصود بالفرض هو تفسير مبدئي للظاهرة موضع الدراسة والذي يحتاج بدوره إلى بيانات يتم جمعها وتحليلها وفي ضوء ذلك يقرر الباحث إما قبول الفرض قبولاً كلياً أو جزئياً واما رفض الفرض والبحث عن فرض بديل آخر يحل محل الفرض المفروض وذلك على ضوء البيانات التي جمعت عن الظاهرة .

وواضح أن وضع الفروض أو تحديد الهدف من الدراسة وكذلك تحديد هياكل الجداول الاحصائية المطلوبة يساعد على تحديد البيانات Data الواجب جمعها مع الأخذ في الاعتبار الميزانية المخصصة للبحث .

ب ــ تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه وكذلك وحدة المجتمع التي يجب أن يؤخذ عنها البيانات :

المجتمع في الاحصاء هو مجموع المفردات التي يجب أن تجمع منها البيانات ، والمفردات التي تمثل وحدة جمع البيانات قد تكون أسرة أو فرداً أو حيازة أو مبنى . فمثلاً عند دراسة التعداد السكاني فمجموع السكان ذكوراً وإناثاً يشكل المجتمع موضع الدراسة ووحدة المجتمع هي الفرد الواحد ، كذلك عند تقدير مجموع الحيازات الزراعية فإن مجموع الأراضي المزروعة هي مجتمع الدراسة اما وحدة المجتمع فهي الفدان (إذا كان الفدان هو وحدة القياس) .

جـ ــ تحديد المصادر التي نستقي منها البيانات :

هناك نوعان من مصادر البيانات :

(١) مصادر غير مباشرة أو مصادر تاريخية :

وهي التي تأتي من سجلات محفوظة عن ظواهر سبق جمع بيانات عنها وسبق نشرها ويجب أن يتوافر في المصادر التاريخية الشروط التالية :

- يجب أن يشار إلى المصدر وأن يكون المصدر موثوق به
- يجب أن نحيط بالظروف التي جمعت فيها البيانات والمفاهيم التي استخدمت وكذلك الأسلوب الذي اتّبع في جمع البيانات .

(٢) مصادر مباشرة أو المصادر الميدانية :

إذا لم تتوافر المصادر التاريخية عن الظاهرة موضع الدراسة نقوم بجمع البيانات عنها من مصادرها الأصلية وذلك إما عن طريق المقابلة الشخصية أو البريد أو التليفون أو . . .

د ـ **التحضير للعملية الميدانية :**

عمليـة الاعداد لجمـع البيانـات من الميدان عمليـة كبيرة تـأخـذ عدة مراحل أهمها :

(١) تصميم صحيفة الاستبانة أو الاستمارة :

ويجب أن يراعى فيها الشروط التالية :

ـ أن تكون شاملة على جميع البيانات اللازمة للدراسة .

ـ أن يراعى التسلسل المنـطقي وأن تصـاغ الأسئـلة بصورة سلسة .

ـ أن يكون عدد الأسئلة محدوداً ومركزاً .

ـ أن تكون الأسئلة واضحة وبعيدة عن الغموض .

ـ محـاولة أن تكـون معظم الأسئلة بحيث تكـون الإجابـة عليها بصـورة رقميـة أو بنعم أو لا والابتعـاد بقـدر الامكـان عن الأسئلة التي تؤدي إلى إجابات وصفية .

ـ أن تبتعد الأسئلة عن الإحراج .

ـ الإقـرار على سريـة البيانـات المعطاة وألا تستخـدم إلَّا لغرض البحث فقط .

(٢) تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات :

وهناك أسلوبان لجمع البيانات :

ـ **أسلوب الحصر الشامل** : وبمقتضـاه يتم جمع البيـانـات من جميـع مفردات المجتمـع موضـع الدراسة .

- **أسلوب العينة** : وبمقتضاه يتم جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع .

ويعتمد اختيار أسلوب جمع البيانات على عوامل متعددة أهمها :

١ ـ طبيعة المجتمع :

إذا كان المجتمع محدوداً Finite أي يمكن حصر مفرداته بسهولة ويسر يمكن استخدام أسلوب الحصر الشامل .

أما إذا كان المجتمع غير محدود Infinite أي لا يمكن حصر جميع مفرداته فنستخدم أسلوب العينة .

٢ ـ طبيعة الظاهرة موضع الدراسة :

إذا كانت مفردات المجتمع تفني أو تتلف نتيجة للاختبار فلا مفرّ من استخدام أسلوب العينة والأمثلة على ذلك كثيرة منها تحليل الدم البشري لمجموعة من المرضى أو عند دراسة صلاحية شحنة من المتفجرات أو الطلقات النارية المستوردة قبل تخزينها .

٣ ـ عنصر الوقت :

أسلوب الحصر الشامل يحتاج إلى وقت كبير إذا ما قورن بأسلوب العينة فإذا كنا في عجلة من الوقت للوصول إلى النتائج فقد يرجح عنصر الوقت استخدام أسلوب العينة بدلاً من أسلوب الحصر الشامل .

٤ ـ الامكانيات الفنية والمادية المتاحة للبحث :

يستلزم اتباع أسلوب الحصر الشامل توافر الموارد المالية كذلك الاشخاص المدربين على جمع وتبويب وتحليل البيانات وعليه إذا كانت الامكانيات المادية والفنية محدودة فلا مفرّ من استخدام أسلوب العينة .

ولتوضيح هذه الفكرة نفترض أنه لإجراء بحث معيّن بميزانية تقديرية ١٠٠٠٠٠ جنيه بالإضافة إلى مجموعة من الخبراء والمدربين تقدر بحوالي ١٠٠ شخص . وبإجراء بحث استطلاعي على عينة من هذا المجتمع لتحديد الأسلوب المناسب وجد أنه لإجراء هذا البحث باتّباع أسلوب الحصر الشامل فيلزم ٥٠٠٠٠٠ جنيه وقوة بشرية مدربة تقدّر بحوالي ٥٠٠ شخص . من ذلك نجد أنه يستحيل إجراء هذا البحث باتّباع أسلوب الحصر الشامل ويلزم تطبيق أسلوب العينة على خمس المجتمع على الأكثر .

(٣) إعداد جهاز الافراد الذي يتولى جمع وإعداد البيانات :

ويتمثل ذلك في اعداد الافراد القائمين على عملية جمع البيانات وتوعيتهم بالهدف من إجراء البحث وبالأسئلة المدوّنة في استمارة البحث وكيفية التعامل مع الجمهور ويتم ذلك عن طريق الندوات والمعسكرات التي تقام من أجل هذا الغرض ويتم في هذه المرحلة تقسيم هذا الجهاز إلى جامعي البيانات ــ مراجعون ــ مشرفون . . . وتحديد اختصاصات كل منهم .

(٤) تهيئة المجتمع للعملية الميدانية :

ويتم ذلـك عن طريق وسـائل الإعـلام المختلفـة كـالإذاعـة والراديو والتليفزيون والصحف والندوات في المساجـد والكنائس والملصقات حتى نضمن تعاون المجتمع وكسب ثقته في إعـطاء بيانات سليمة .

هـ ـ تصنيف وتجهيز البيانات :

بعـد إتمام جمـع البيـانـات من الميـدان تـأتي مـرحلة استخـراج الجداول الاحصائية والتي تتم على عدة مراحل :

(١) مراجعة استمارات البحث مكتبياً :

بغرض التأكـد من الاعداد الصحيحـة للاستمـارات ومن أن جميع الأسئلة قد تمّ الإجابة عليها بطريقـة واضحة ومتسقـة وفي هـذه المرحلة قـد يتم إعادة مـلء الاستمارات لعينـة محدودة من المفردات باستخـدام جامعي بيـانات أكثـر خبرة للتـأكد من دقـة البيانات ومطابقة النتائج .

(٢) التجهيز الآلي للبيانات :

في حالة الأبحاث الكبيرة مثل تعداد السكـان فإننـا نستخدم الآلات الحـاسبـة الالكتـرونيـة في تصنيف البيـانـات وتتم على مرحلتين :

١ ـ عمليـة التـرميـز : بمعنى استبـدال الاجـابـات الـوصفيـة بـالاستمارة إلى رمـوز رقمية تسـاعد على تفـريغ البيـانات وترجمتها على بطاقات التثقيب .

٢ ـ **عمليـة التثقيب** : وتتمثل في نقـل الاجابـات الرمـزية على بطاقات تسمى بطاقات التثقيب . وحاليا يتم نقل الاجابـات الرمزية إلى الكمبيوتر مباشرة بدون المرور بعملية التثقيب .

(٣) فرز وتبويب البيانات :

وتتم هذه العملية لاستخراج الجداول الاحصـائية يـدوياً إذا كـان حجم البيانـات محدوداً وآليـاً إذا كان حجم البيـانـات غيـر محدود باستخدام البطاقات المثقبة مع آلات الفرز والتبـويب أو باستخدام الكمبيوتر .

و ـ **عرض البيانات وتحليلها** : ويشمل : ـ

١ ـ التمثيل البياني للبيانات .

٢ ـ تلخيص البيـانات في صـورة مقـاييس إحصـائيـة مثـل مقـاييس الموضع والتشتت .

٣ ـ إجراء بعض الاختبارات الاحصائية للوصول إلى قرار بقبـول أو رفض الفروض التي افترضت كتفسير مبدئي للظاهرة .

أنواع العينات

العينة Sample هي جزء يختار بطريقة معيّنة للحصول على معلومات لتوضيح خصائص المجتمع Population الذي سحبت منه هذه العينة . ويتضح أن هذا الأسلوب في التعرف على خصائص المجتمع يوفر الكثير من الوقت والتكاليف.ولسحب العينة يجب أن يتوافر الاطار Frame وهو الوسيلة التي تمكننا من الوصول إلى كل مفردة من مفردات المجتمع (جميع وحدات المعاينة) وقد يكون الإطار قائمة بالأسماء أو خريطة أو أي وسيلة أخرىٰ تحتوي على جميع وحدات المجتمع موضع الدراسة ويجب أن يتوافر في الإطار الشروط التالية :

(١) الوضوح في تعريف المجتمع .
(٢) عدم التكرار لأي مفردة من مفردات المجتمع .
(٣) الشمول لكل مفردات المجتمع .

وهناك طرق عديدة لاختيار العينات أهمها :

١ ــ العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample :

هي أبسط أنواع العينات وتتم بإحدى طرق الاختيار العشوائي . ومبدأ العشوائية يعني إعطاء كل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة في الاختيار أو الظهور في العينة .

ولتوضيح ذلك نفترض أنّ لدينا مجتمعاً مكوناً من ١٠٠ مفردة ونريد سحب عينة من ١٠ مفردات مع إعطاء كل مفردة نفس الفرصة في الاختيار ويمكننا تحقيق ذلك بعدة طرق أهمّها :

- تعطى كل مفردة من مفردات المجتمع رقماً مسلسلاً نضعه على قصاصات متساوية من الورق أو بطاقات صغيرة فيكون لدينا مائة بطاقة متماثلة ونخلط هذه البطاقات جيداً ثم نسحب ١٠ بطاقات واحدة بعد الأخرىٰ سواء بطريقة السحب مع الإعادة أو السحب مع عدم الإعادة فنحصل على العينة المطلوبة .
- نفس الطريقة نتبعها ولكن باستخدام كرات صغيرة متماثلة في الحجم تكتب عليها الأرقام المسلسلة وتخلط جيداً في كيس ونسحب الكرات العشر .

ويلاحظ أن هذه الطرق سهلة الاستخدام طالما كان حجم المجتمع صغيراً ولكن في حالة المجتمعات الكبيرة يستحيل استخدام هذه الطرق اليدوية ونلجأ إلى استخدام جداول الأرقام العشوائية التي أعدت خصيصاً لهذا الغرض كذٰلك يمكن استخدام الآلات الحاسبة الالكترونية في سحب مثل هذه العينات .

ويلاحظ أن العينة العشوائية البسيطة تمتاز بسهولة اختيارها في حالة المجتمعات الصغيرة ولكن يعاب عليها صعوبة استخدامها في المجتمعات الطبقية حيث لا تضمن تمثيل كل طبقة من هذه الطبقات بنفس نسبتها في المجتمع .

٢ - العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample :

ويلاحظ أن العينة العشوائية المنتظمة تحتوي على عنصرين :

- عنصر العشوائية : ويظهر في اختيار المفردة الأولى .
- عنصر الانتظام : ويظهر في اختيار بقية المفردات .

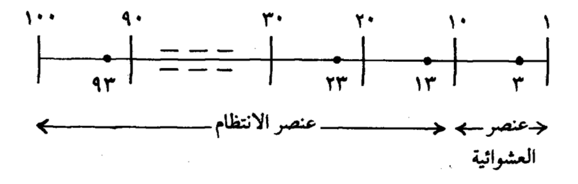
وهـذا النوع من أنـواع العينات يـوفر أسلوبـاً بسيطاً لاختيـار العينـة بتكاليف ومجهود أقل من العينة العشوائية البسيطة .

وتتلخص خـطوات سحب العينـة العشـوائيـة المنتـظمـة في تقسيم المجتمع إلى عدد من الفئات المتساويـة الطول ومن المجمـوعة الأولى نختـار مفردة عشـوائيـة بـاتبـاع الأسلوب السـابق في العينـة العشـوائيـة البسيطة ونحدد تـرتيبها في المجمـوعة ثم نحصـل على بقية المفـردات بإضافة طول الفئة على التوالي كما يتضح من المثال التالي :

بـافتـراض المثـال السـابق والـذي يتضمن اختيـار عينـة من ١٠ مفـردات من مجتمـع حجمــه ١٠٠ مفـردة ، في هــذه الحـالـة نقسم المجتمـع إلى ١٠ مجموعـات متساويـة كـل مجمـوعـة مكـونـة من ١٠ مفـردات ، وباتبـاع الطريقـة العشوائيـة على مفردات المجمـوعة الأولى نسحب مفـردة ونفتـرض أن لهـا التـرتيب «٣» ونستـطيـع تحـديـد بقيـة مفردات العينة بـإضافـة طول الفئـة (١٠) على التوالي. فتكـون المفردة الثانية ١٣ والثالثة ٢٣ وهكذا . . .

أي أن العينة هي ٣ ، ١٣ ، ٢٣ ، . . . ، ٩٣

يمكن توضيحها بالرسم التالي :



ويتضح من المثال السابق انه يسهل اختيار العينة العشوائية المنتظمة بمجرد تحديد طول الفئة واختيار المفردة الأولى من بين مفردات المجموعة الأولى بالطريقة العشوائية . كما يتضح أن هذا الأسلوب يسهل استخراج العينة من السجلات .

٣ ـ العينة الطبقية Stratified Sample :

يفضل استخدام فكرة العينة الطبقية إذا كان المجتمع غير متجانس ويمكن تقسيمه إلى طبقات متجانسة حيث يمكن اختيار عينة تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً وذلك لأنها تأخذ في الاعتبار جميع الطبقات بحسب حجم كل منها .

ولتوضيح فكرة العينة الطبقية نفترض مجتمعاً مكوناً من ١٠٠ فرد بينهم ٤٠ ذكر و٦٠ أنثى ونريد سحب عينة من ٢٠ فرداً بحيث يراعى حجم كل طبقة . في هذه الحالة نسبة الذكور إلى الاناث ٤ : ٦ وبالتالي يجب أن تشمل العينة ٨ ذكور و١٢ أنثى ويتم ذلك باختيار ٨ ذكور من بين ٤٠ وأيضاً ١٢ أنثى من بين ٦٠ وذلك بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو العينة العشوائية المنتظمة .

٤ ـ العينة متعددة المراحل Multi - Stage Sample :

هي العينة التي نصل فيها إلى كل مفردة من مفردات جمع البيانات على مرحلتين أو أكثر .

ولتوضيح هذا النوع من أنواع العينات نفترض أننا نريد إجراء تعداد سكاني باستخدام أسلوب العينة في مصر (كما حدث في عام ١٩٦٦) فنبدأ أولاً باختيار عدد من المحافظات من بين محافظات مصر ثم اختيار عدد من مراكز هذه المحافظات ثم اختيار عدد من قرى هذه المراكز ومن ثم اختيار مفردات عينة البحث .

يتضح من المثال السابق أننا توصلنا إلى مفردات العينة بعد أربع مراحل :

المرحلة الأولى : اختيار عدد من المحافظات

المرحلة الثانية : اختيار عدد من المراكز

المرحلة الثالثة : اختيار عدد من المدن والقرى

المرحلة الرابعة : اختيار مفردات العينة

ويستخدم أسلوب العينة متعددة المراحل كثيراً في مجال الزراعة حيث يستخدم هذا الأسلوب في تقدير متوسط الانتاج من محصول معيّن وفي التعدادات الزراعية المختلفة .

أنواع الأخطاء

اتّضح من عرضنا السابق أن هناك أسلوبين لجمع البيانات هما أسلوب الحصر الشامل وأسلوب العينة . وفي الواقع فإننا نصل إلى تقديرات دقيقة عن المجتمع باستخدام أسلوب الحصر الشامل على عكس أسلوب العينة حيث نتوقع عند استخدامه أخطاء تسمى بأخطاء المعاينة . وهناك أخطاء من نوع آخر تسمى بأخطاء التحيّز يمكن أن يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة وهي التي تصادفه خلال جميع مراحل البحث الاحصائي .

نخلص مما سبق أن هناك نوعين من الأخطاء هما : ـ

١ ـ أخطاء المعاينة Sampling Errors :

هي الأخطاء التي تنشأ نتيجة لعوامل صدفية بحتة من اختلاف نتائج أسلوب العينة عن نتائج أسلوب الحصر الشامل . واخطاء المعاينة يمكن قياسها كمياً ومن ثم يمكن تقديرها تقديراً علمياً . ومن البديهي أن أخطاء المعاينة تقل كلما زاد حجم العينة وتتلاشى تماماً إذا استخدمنا أسلوب الحصر الشامل وعليه فإنه يمكننا التحكم في اخطاء المعاينة عن طريق تغيير حجم العينة .

٢ ـ أخطاء التحيّز Biases Errors :

هي الأخطاء التي يمكن أن يقع فيها الباحث خلال جميع مراحل البحث سواء استخدم أسلوب العينة أو أسلوب الحصر الشامل وتسمى أخطاء غير المعاينة . ومن أمثلة أخطاء التحيّز ما يلي : ـ

١ ـ عدم الدقة في تعريف المجتمع موضع الدراسة وكذلك وحدة المجتمع .

٢ ـ عدم وضوح الرؤية في تحديد الغرض من إجراء البحث وتحديد المشكلة موضع الدراسة .

٣ ـ الاعتماد على مصادر غير دقيقة وغير موثوق بها في جمع البيانات .

٤ ـ أخطاء في استمارة البحث .

٥ ـ عدم اختيار الأسلوب المناسب لجمع البيانات .

٦ ـ الاعداد غير السليم لجامعي البيانات .

٧ ـ أخطاء في عملية جمع البيانات من مصادرها .

٨ ـ أخطاء في فرز وتبويب البيانات .

٩ ـ أخطاء في عرض البيانات وفي حساب المقاييس الاحصائية المختلفة .

خصائص مجموع عدد من المفردات

سوف نحتاج لإثباتنا لبعض القوانين في الفصول التالية لبعض المصطلحات والعلاقات اللازمة لمجموع مفردات متغير واحد أو متغيرين .

أ ــ بالنسبة إلى متغير واحد :

إذا افترضنا متغيراً عشوائياً (س) وسحبنا عينة حجمها (ن) مفرداتها على التوالي هي :

$$س_١ ، س_٢ ، .... ، س_ن$$

فإن مجموع هذه القيم يرمز له بالرمز (مجـ س) أي أن

$$مجـ س = \underset{ر = ١}{\overset{ر = ن}{مجـ}} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_ن$$

وهناك خصائص عديدة للمجموع أهمها : ــ

(١) مجموع مفردات المتغير (س) مضروباً في مقدار ثابت يساوي المقدار الثابت مضروباً في مجموع مفردات المتغير أي أن :

$$مجـ أ س = أ \ مجـ س$$

حيث أ مقدار ثابت

(٢) مجموع مقدار ثابت عدد (ن) من المرات يساوي العدد مضروباً في المقدار الثابت أي أن :

$$مجـ أ = ن أ$$

(٣) مجموع المتغير مضافاً إليه (أو مطروحاً منه) مقدار ثابت يساوي مجموع المتغير مضافاً إليه (أو مطروحاً منه) عدد الحدود في المقدار الثابت أي أن :

مجـ (س ± أ) = مجـ س ± ن أ

(٤) مجموع مربعات قيم متغير لا يساوي مربع مجموع قيم هذا المتغير أي أن :

مجـ $س^2$ ≠ $(مجـ س)^2$

ب ــ **بالنسبة إلى متغيرين :**

إذا افترضنا متغيراً عشوائياً آخر وليكن (ص) وسحبت عينه حجمها (ن) مفرداتها على النحو التالي :

$ص_1$ ، $ص_2$ ، . . . ، $ص_ن$

وباستخدام قيم المتغيرين (س، ص) يمكن إثبات العلاقات التالية :

١ ــ مجموع قيم المتغيرين يساوي مجموع قيم المتغير الأول مضافاً إليه مجموع قيم المتغير الثاني أي أن :

مجـ (س + ص) = مجـ س + مجـ ص

٢ ــ مجموع خارج قسمة متغيرين لا يساوي خارج قسمة مجموع المتغيرين أي أن :

$$مجـ \left(\frac{س}{ص} \right) \neq \frac{مجـ س}{مجـ ص}$$

٣ ــ مجموع حاصل ضرب متغيرين لا يساوي حاصل ضرب مجموع المتغيرين أي أن :

مجـ (س ص) ≠ (مجـ س) (مجـ ص)

تمارين الفصل الأول

(١) تكلم عن أنواع العينات موضحاً مزايا وعيوب كل منها .

(٢) فرق بين أسلوب الحصر الشامل وأسلوب العينة .

(٣) عـرّف علم الاحصاء ثم وضّح الفرق بين الاحصـاء الوصفي والاحصـاء التحليلي .

(٤) تكلم عن مصادر جمع البيانات .

(٥) فـرّق بين العينة العشـوائية المنتـظمة والعينـة الـطبقيـة من حيث طـريقـة اختيارها ومزايا وعيوب كل منها .

(٦) تكلم عن خطأ المعاينة وخطأ التحيّز .

(٧) إذا كان لدينا القيم التالية للمتغيرين (س، ص) .

س	ص
٩	١٠
٧	١٥
٥	١٢
٨	٢٠
٦	١٨

(أ) احسب مجـ س ، مجـ ص ، مجـ ٣ س ، مجـ $س^{٢}$ ، مجـ س ص ،
مجـ (س + ص) .

(ب) تحقق من صحة العلاقات الآتية :

(١) مجـ $س^{٢}$ ≠ $(مجـ س)^{٢}$.

(٢) مجـ س ص ≠ (مجـ س) (مجـ ص)

(٣) مجـ (س + ص) = مجـ س + مجـ ص

الفصل الثاني
التوزيعات التكرارية
FREQUENCY DISTRIBUTIONS

مقدمــة

من استعراضنا لمراحل البحث الاحصائي في الفصل الأول نجد أنه بعد عملية جمع البيـانات تكـون في حوزتنـا كميات هـائلة من الأرقام وخـاصة في حـالة المجتمعـات الكبيـرة ولا نستـطيـع تفهم مـدلـولهـا أو تفسيـر خصـائص المجتمـع الـذي سحبت منـه . والخـطوة التي تتلو ذلـك هي عمليـة تلخيص وتبويب البيانـات في صورة مجمـوعات أو فئـات تعطي مـدلولاً معينـاً . فمثلاً إذا كان لدينا بيانات عن درجات مجمـوعة كبيـرة من الطلبـة في امتحـان معيّن فـلا نستطيـع أن نتفهم تلك الدرجـات واتجـاهـاتهـا إلاّ بعـد تـرتيب وتلخيص درجـات الطلبـة في صورة فئـات تعكس التقديـرات المختلفة (ممتـاز ، جيـد جداً ، جيد ، مقبول ، راسب) .

خلاصة القول أن عملية تفريغ البيانات في صـورة توزيعـات تكراريـة هي خطوة لازمة حتى يمكن دراسة الظواهـر التي يمكن أن تعكسها هـذه البيانـات وأيضاً كخطوة أولى لدراسة تلك الظواهر وعـرضها بيـانياً واستخـراج المقاييس الاحصائية المختلفـة . ونحصل على التـوزيع أو الجـدول التكراري بتلخيص البيانات الخام وتوزيعها على فئات ثم تحديد عـدد التكرارات التي تنـاظر كـل فئة .

ويجب أن تتوافر الشروط التالية عند تكوين الجداول التكرارية :

(١) أن تهتم البيانات الموجودة بالجدول بموضوع واحد .

(٢) وضع عنوان للجدول بحيث يعطي فكرة واضحة عن محتويات الجدول وأهميته بنظرة واحدة سريعة .

(٣) أن يشير الجدول إلى مصدر أو مصادر البيانات لتوضيح صاحب الفضل في تجميع البيانات بالجدول والمسؤول عن الأخطاء الواردة به .

(٤) أن يكون عدد فئات الجدول معقولاً بحيث لا يقل عن خمس ولا يزيد عن خمس عشر .

(٥) أن نتحاشى إستخدام الجداول التكرارية المفتوحة من أسفل أو من أعلى بقدر الامكان حتى لا يعرقل ذلك حساب بعض المقاييس الاحصائية .

(٦) أن نتحاشى أيضاً الجداول التكرارية غير المنتظمة أي الجداول ذات الفئات غير المتساوية إلاّ في حالات الضرورة إذا لزم الأمر ذلك .

(٧) أن تكون الفئات مستقلة وغير متداخلة بحيث تبدأ الفئة التالية من حيث تنتهي الفئة السابقة لها .

تحديد عدد الفئات :

المشكلة الأولى في تكوين الجدول أو التوزيع التكراري هي تحديد عدد الفئات الملائم وطول كل فئة تبعاً لذلك وتتلخص خطوات تحديد عدد الفئات على النحو التالي :

(١) تحـديـد الحـد الأدنى والحـد الأعلى للبيـانـات التي نـريـد وضعهـا في صورة جدول تكراري .

(٢) حساب المدى الذي تتوزع عليه هذه البيانات باستخدام العلاقة .

المدى = الحد الأعلى - الحد الأدنى

(٣) وبوضع عدد الفئات المناسب يمكن تحديد طول الفئة المناسب .

وهنـاك طريقـة تفسيريـة لتحديـد عدد الفئـات وذلك بـاستخدام القـاعدة التالية :

عدد الفئات = ١ + ٣,٣ لو$_{١٠}$ ن

حيث ن عدد القيم

فمثلاً إذا كان ن = ١٠٠ فإن

عدد الفئات = ١ + ٣,٣ لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ١ + ٣,٣ × ٢ = ٨ تقريباً

وإذا كان ن = ١٠٠٠ فإن

عدد الفئات = ١ + ٣,٣ لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ١ + ٣,٣ × ٣ = ١١ تقريباً

يتضـح أنه بـاستخدام هـذه القاعـدة أن عدد الفئـات يزداد بـازدياد عـدد القيم وبتحديد عـدد الفئات والحـد الأدنى والأعلى للقيم يمكن تحديـد الحـد الأدنى والأعلى لكـل فئـة من الفئـات بعـد تحـديـد طـول الفئـة باستخدام العلاقة :

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$$

أنواع التوزيعات التكرارية

أولاً : التوزيعات التكرارية البسيطة :

وهي التوزيعات التي تختص بظاهرة واحدة ويمكن تقسيمها إلى :

أ ــ توزيع تكراري بسيط للاعداد :

ونستخدم هذا النوع من الجداول في حالة البيانات الوصفية أو السلاسل الزمنية (السلاسل التاريخية) مثال ذلك إذا كان لدينا بيانات بتقديرات ثلاثين طالباً في مادة الاحصاء على النحو التالي :

جيد	مقبول	ممتاز	مقبول	جيد جداً	ضعيف
جيد جداً	مقبول	ضعيف جداً	جيد جداً	ضعيف	جيد جداً
جيد	جيد	مقبول	مقبول	جيد	مقبول
ضعيف	مقبول	جيد	جيد	مقبول	جيد
ممتاز	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	مقبول

وللحصول على التوزيع التكراري نبدأ أولاً بتكوين جدول للتفريغ على الصورة التالية :

جـدول (٢ ـ ١)

جدول تفريغ التقديرات

التقديـر	العـلامـات	التـكـرار
ضعيف جداً	/	١
ضعيف	////	٤
مقبول	~~////~~ ~~////~~	١٠
جيـد	~~////~~ ///	٨
جيد جداً	~~////~~	٥
ممتـاز	//	٢
المجمـوع		٣٠

يتضح أن جدول التفريغ يتكـون من ثلاثـة أعمدة العمـود الأول للفئات أو التقدير كما في هذا المثـال والعمود الثـاني للعلامـات ويلاحظ أن لكـل مفردة علامة واحـدة تمثل بخط مـائل ولتسهيـل عملية العـد نضع العـلامة الخـامسة بـطريقة عكسيـة لتشكل مـا يسمى بالحـزمـة الاحصـائيـة (~~////~~) وحجمهـا خمسة ، والعمود الثالث يشمل تكرار كل فئة من الفئات .

وبحذف العمود الخـاص بالعـلامات من الجـدول السابق نحصـل على ما يسمى بالتوزيع التكراري للتقديرات في الصورة التالية :

جدول (٢ ــ ٢)

التوزيع التكراري لدرجات ثلاثين طالباً

التقدير	التكرار
ضعيف جدا	١
ضعيف	٤
مقبول	١٠
جيد	٨
جيد جدا	٥
ممتاز	٢
المجموع	**٣٠**

ويسمى بالتوزيع التكراري البسيط للاعداد نظراً لأن العمود الأول والخاص بالفئات أعطى في صورة تقديرات ، ويختلف الأمر إذا أعطيت نسب هذه التقديرات فنحصل على جدول تكراري للفئات غير المتساوية كما سيتضح فيما بعد .

ومن أمثلة الجداول أو التوزيعات التكرارية البسيطة للاعداد جداول السلاسل الزمنية التي توضح صادرات أو مبيعات أو واردات سلعة معيّنة على سبيل المثال جدول (٢ ــ ٣) الذي يوضح صادرات الكويت من النفط وجدول (٢ ــ ٤) الذي يوضح أعداد سكان مصر .

جـدول (٢ ــ ٣)

قيمة صادرات الكويت من النفط

السنة	قيمة الصادرات بالمليون دينار
١٩٧٥	٢٤٤٣,٣
١٩٧٦	٢٦١٧,٧
١٩٧٧	٢٥١٥,٤
١٩٧٨	٢٥٩١,٦
١٩٧٩	٤٦٣٤,٦
١٩٨٠	٤٧٧٨,٣
١٩٨١	٣٨٤٤,٤
١٩٨٢	٢٥٤١,٥
١٩٨٣	٢٨٩٩,٥
١٩٨٤	٣٠٧٦,٤

جـدول (٢ ــ ٤)

عدد سكان مصر

السنة	عدد السكان بالمليون
١٩٦٠	٢٥,٨٣
١٩٦١	٢٦,٥٦
١٩٦٢	٢٧,٢٤
١٩٦٣	٢٧,٩٧
١٩٦٤	٢٨,٧٦
١٩٦٥	٢٩,٥٤
١٩٦٦	٣٠,١٢

ومن أمثلة التوزيعات التكرارية البسيطة أيضاً الجداول الوصفية التي تعالج ظاهرة واحدة كما في جدول (٢ ــ ٥) أو عدة ظواهر كما في جدول (٢ ــ ٦).

جـــدول (٢ ــ ٥)

توزيع عينة من ٥٠ مفردة بحسب الحالة الاجتماعية

الحالة الاجتماعية	عدد الأفراد
أعــزب	١٠
متــزوج	٢٦
مطــلق	٦
أرمــل	٨
المجمـوع	٥٠

جـــدول (٢ ــ ٦)

توزيع الأسر حسب الحالة التعليمية
لرب الأسرة والجنسية

الحالة التعليمية لرب الأسرة	كويتي	غير كويتي
امّــي	١٠٢	٤٣
يقرأ ويكتب	٨٤	٥٧
ابتدائيــة	٣٣	٣٣
متـوسـطـة	٢٩	٤٣
ثانوية أو ما يعادلها	٢٩	٧١
جامعي فما فوق	١٤	١١١
المجمــوع	٢٩١	٣٥٨

ومن أمثلة التـوزيعات التكـرارية البسيـطة الجداول الـوصفية المـزدوجـة

كمـا في جـدول (٢ ـ ٧) أو الجـداول الـوصفيـة المـركبـة كمـا في جـدول (٢ ـ ٨) .

جـدول (٢ ـ ٧)

المساكن المأهولة حسب محافظات دولة الكويت (تعداد ١٩٨٠)

المحافظة	عدد المساكن		
	خاصة	جماعية	جملة
العاصمة	٢٠٩٣٦	٢٦٩٥	٢٣٦٣١
حولي	١٠٤٩١٦	٤٧٣٤	١٠٩٦٥٠
الأحمدي	٢٧٣٠٣	٢١٦٢	٢٩٤٦٥
الجهراء	١٦٨٠٠	٨٥٤	١٧٦٥٤
المجموع	١٦٩٩٥٥	١٠٤٤٥	١٨٠٤٠٠

جـدول (٢ ـ ٨)

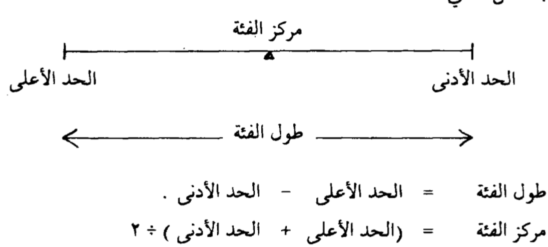
معدلات المواليد والوفيات حسب النوع والجنسية

في عامي (١٩٧٠ ، ١٩٧٨)

السنوات والجنسية		المواليد أحياء		الوفيات	
		ذكور	اناث	ذكور	اناث
١٩٧٠	كويتي	٤٦,٣	٤٥,٩	٦,٣	٥,٢
	غير كويتي	٣٦,٣	٥٧,٥	٤,٣	٤,٥
	المجموع	٤٠,٥	٥١,٦	٥,١	٤,٩
١٩٧٨	كويتي	٤٨,٧	٤٦,٦	٦,٤	٤,٥
	غير كويتي	٢٧,٧	٤٢,٨	٣,٥	٢,٢
	المجموع	٣٥,٨	٤٤,٧	٤,٦	٣,٤

ب ـ توزيع تكراري منتظم (فئات متساوية) :

إذا كان لدينا مجموعة كبيرة من البيانات الكمية فيلزم أولاً تلخيصها بوضعها في صورة فئات . ولكل فئة حدان حد أدنى وحد أعلى يمكن تمثيله بالشكل التالي :



طول الفئة = الحد الأعلى - الحد الأدنى .

مركز الفئة = (الحد الأعلى + الحد الأدنى) ÷ ٢

وقبل أن نبدأ في تكوين التوزيع التكراري للفئات المتساوية يجب أن نتفق على الصورة التي يجب أن تكتب عليها الفئات فمثلاً إذا كان لدينا مجموعة من البيانات حدها الأدنى صفر وحدها الأعلى ٥٠ وافترضنا توزيع هذه البيانات في صورة توزيع تكراري عدد فئاته ٥ · في هذه الحالة يلزم أن تكون أطوال الفئات متساوية وكل منها يساوي ١٠ .

أي أن الفئات تأخذ الصورة : ـ

صفر - ١٠
١٠ - ٢٠
٢٠ - ٣٠
٣٠ - ٤٠
٤٠ - ٥٠

يتضح أنه لكل فئة Class حدان حد أدنى وحد أعلى فمثلاً الفئة الأولى حدها الأدنى صفر والأعلى ١٠ والفئة الثانية حدها الأدنى ١٠ والأعلى ٢٠ وهكذا . . .

كما يتضح أن الفئات متساوية وطول كل منها ١٠ .

ولكن وضع الفئات في هذه الصورة قد يحدث بعض الأخطاء عند تفريغ البيانات ولتوضيح ذلك نفترض أن هناك مفردة قيمتها ١٠ فأين نستطيع تفريغها هل نضع العلامة أمام الفئة الأولى أم الفئة الثانية والحقيقة فإن الفئة (صفر ـ ١٠) يجب أن تقرأ صفراً فأقل من ١٠ والفئة (١٠ ــ ٢٠) يجب أن تقرأ ١٠ فأقل من ٢٠ وهكذا . . . . وفي هذه الحالة يجب أن نضع العلامة الخاصة بالمفردة ١٠ أمام الفئة الثانية :

ولتسهيل ذلك يكفي كتابة الحدود الدنيا فقط كما في الصورة :

صفر ــ	وتقرأ صفراً فأقل من ١٠
١٠ ــ	وتقرأ ١٠ فأقل من ٢٠
٢٠ ــ	وتقرأ ٢٠ فأقل من ٣٠
٣٠ ــ	وتقرأ ٣٠ فأقل من ٤٠
٤٠ ــ ٥٠	وتقرأ ٤٠ فأقل من ٥٠

ويلاحظ أننا وضعنا الحد الأعلى للفئة الأخيرة وذلك لتمييز الجداول المقفولة عن الجداول المفتوحة كما سيتضح فيما بعد .

مثال (٢ ــ ١) :

كون التوزيع التكراري المنتظم لدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة بإحدى الكليات والتي كانت على النحو التالي :

٩٣	٧٦	٨٠	٦٢	٩٠	٦٨	٨٢	٧٥	٨٤	٦٨
٧٥	٨٥	٥٩	٧١	٩٣	٦٠	٧٣	٨٤	٧٩	٧٣
٧٢	٦٣	٧٨	٩٥	٦٢	٧٤	٨٧	٧٥	٦٥	٦١
٦٠	٦٨	٧٤	٦٩	٧٧	٩٤	٧٥	٨٢	٧٨	٦٦
٧١	٨٣	٧٩	٦٠	٩٥	٧٥	٦١	٨٩	٧٨	٩٦
٧٥	٧١	٧٥	٧٦	٨٥	٧٨	٩٧	٦٧	٦٢	٧٩
٧٤	٥٣	٧٦	٦٦	٧٨	٨٠	٥٧	٧٣	٨٠	٦٥
٧٧	٨٥	٧٥	٧٦	٦٣	٧٢	٨١	٧٣	٦٧	٨٦

الحـل :

يـلاحظ أن الحـد الأدنى للدرجـات هـو ٥٣ والحـد الأعلى هـو ٩٧ ، بـافتراض أن عـدد الفئات المـطلوبة هـو ١٠ فإن طـول الفئـة يجب أن يكـون ٥ ، ويـلاحظ أنه ليس من الضـروري أن نبـدأ بـالحـد الأدنى وهـو ٥٣ كحـد أدنى للفئـة الأولى ويمكننـا أن نبـدأ بـأقـرب عـدد دائـري لـه وهـو ٥٠ أي أن الفئات تأخذ الصورة ٥٠ ــ ، ٥٥ ــ ، ٦٠ ــ ، .... ، ٩٥ ــ ١٠٠

جـدول (٢ ــ ٩)

تفريغ درجات الطلبة

الفئـات	العــلامــات	التكرار
٥٠ ــ	/	١
٥٥ ــ	//	٢
٦٠ ــ	~~////~~ ~~////~~	١٠
٦٥ ــ	~~////~~ ~~////~~	١٠
٧٠ ــ	// ~~////~~ ~~////~~	١٢
٧٥ ــ	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ // ~~////~~	٢٢
٨٠ ــ	//// ~~////~~	٩
٨٥ ــ	/ ~~////~~	٦
٩٠ ــ	////	٤
٩٥ ــ ١٠٠	////	٤
المجموع		٨٠

ويمكن الحصـول على التوزيـع التكـراري المنتـظم لـدرجـات الـطلبـة (أطـوال الفئات متسـاوية وطـول كل منهـا ٥) وذلك بحـذف العمـود الأوسط كما في جدول (٢ ــ ١٠) .

جـدول (٢ ـ ١٠)

التوزيع التكراري لدرجات ٨٠ طالباً

الفئـات	التـكـرار
٥٠ ـ	١
٥٥ ـ	٢
٦٠ ـ	١٠
٦٥ ـ	١٠
٧٠ ـ	١٢
٧٥ ـ	٢٢
٨٠ ـ	٩
٨٥ ـ	٦
٩٠ ـ	٤
٩٥ ـ ١٠٠	٤
المجمـوع	٨٠

جـ ـ التوزيع التكراري غير المنتظم (فئات غير متساوية) :

إذا كـانت هنـاك فئـة واحـدة علىٰ الأقـل تختلف في طـولهـا عن بقيـة الفئات فإن الجدول يطلق عليه التوزيع التكراري غير المنتظم .

وفي بعض الأحيـان يتعين أن تكون الفئـات غيـر متسـاويـة حتى تعـطي البيانات بعد تفريغها مدلولاً معيناً كما هو الحـال في المثال السـابق في جدول (٢ ـ ٢) الـذي يـوضـح تـوزيـع الـدرجـات لمجمـوعـة من الـطلبـة حسب التقديرات المختلفة والذي يمكن إعـادة كتابتـه في الجدول التـالي بعد إعـادة كتابة التقديرات في صورة النسب المئوية لها .

جـدول (٢ ـ ١١)

التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً

فـئـات	تـكـرار
صفر ـ	١
٣٥ ـ	٤
٥٠ ـ	١٠
٦٥ ـ	٨
٨٠ ـ	٥
٩٠ ـ ١٠٠	٢
المجمـوع	٣٠

يلاحظ اختلاف أطوال الفئات وعليه يطلق على هـذا الجدول بـالتوزيـع التكراري غير المنتظم .

د ـ التوزيع التكراري المتجمع Cumulative Frequency Distribution :

تعـطى التـوزيعـات التكـراريـة المتجمعـة معلومـات أكثـر تفصيـلاً من التـوزيعات التكـرارية كمـا سوف يتضـح أهميتها فيمـا بعـد في حسـاب بعض المقاييس الاحصائية وهناك نوعين :

(١) التوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

والغرض منه معـرفة عـدد المفردات التي تقـل عن قيمة معينـة.فمثلاً من جـدول (٢ ـ ١٠) إذا أردنا معـرفة عـدد الطلبة الذين تقل درجـاتهم عن ٦٥ فيتضح أنه يشمـل مجموع تكـرارات الفئات الثـلاثة الأول أي ١ + ٢ + ١٠

يساوي ١٣ طالبا، ولتسهيل معرفة مثل هذه النسب يلزم تكوين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والذي يشتمل على عمودين :

العمود الأول : ويسمى الحدود العليا للفئات .

العمود الثاني : ويسمى التكرار المتجمع الصاعد .

مثال (٢ ـ ٢) :

كون الجدول المتجمع الصاعد للتوزيع التكراري المنتظم السابق بجدول (٢ ـ ١٠) .

الحل :

جدول (٢ ـ ١٢)

التوزيع المتجمع الصاعد لدرجات ٨٠ طالباً

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٥٠	صفر
أقل من ٥٥	١
أقل من ٦٠	٣
أقل من ٦٥	١٣
أقل من ٧٠	٢٣
أقل من ٧٥	٣٥
أقل من ٨٠	٥٧
أقل من ٨٥	٦٦
أقل من ٩٠	٧٢
أقل من ٩٥	٧٦
أقل من ١٠٠	٨٠

ويلاحظ دائماً أن التكرار المتجمع الصاعد يبدأ بالصفر وينتهي بالمجموع الكلي للتكرارات أي أن التكرار المتجمع الصاعد لأقل من الحد الأدنى للفئة الأولى مساوياً للصفر وأيضاً التكرار المتجمع الصاعد لأقل من الحد الأعلى للفئة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات .

مثال (٢ ــ ٣) :

كون الجدول المتجمع الصاعد للتوزيع التكراري غير المنتظم السابق بجدول (٢ ــ ١١) .

الحــل :

جــدول (٢ ــ ١٣)

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات ٣٠ طالباً

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من صفر	صفــر
أقل من ٣٥	١
أقل من ٥٠	٥
أقل من ٦٥	١٥
أقل من ٨٠	٢٣
أقل من ٩٠	٢٨
أقل من ١٠٠	٣٠

(٢) التوزيع التكراري المتجمع الهابط :

الغـرض منه معـرفة عـدد المفردات التي تـزيد عن قيمـة معيّنة . فمثـلاً

من جدول (٢ ــ ١٠) إذا أردنا معرفة نسبة الطلبة المتفوقين الحاصلين على درجات أكثر من ٨٠ فنجد أن عدد المتفوقين يمكن الحصول عليه بجمع التكرارات المناظرة للفئات الأربع الأخيرة أي أن

عدد الطلبة المتفوقين = ٩ + ٦ + ٤ + ٤ = ٢٣ طالباً .

ونسبتهم هي :

$$\frac{٢٣}{٨٠} \times ١٠٠ = ٢٨,٧٥ \%$$

ويتكون الجدول التكراري المتجمع الهابط من عمودين :

العمود الأول : ويشمل الحدود الدنيا للفئات .

العمود الثاني : ويشمل التكرار المتجمع الهابط .

مثال (٢ ــ ٤) :

كون التوزيع التكراري المتجمع الهابط للتوزيع التكراري المنتظم بجدول (٢ ــ ١٠) .

الحل :

جـدول (٢ ـ ١٤)

التوزيع المتجمع الهابط لدرجات ٨٠ طالباً

حدود دنيا للفئات	تكرار متجمع هابط
٥٠ فأكثر	٨٠
٥٥ فأكثر	٧٩
٦٠ فأكثر	٧٧
٦٥ فأكثر	٦٧
٧٠ فأكثر	٥٧
٧٥ فأكثر	٤٥
٨٠ فأكثر	٢٣
٨٥ فأكثر	١٤
٩٠ فأكثر	٨
٩٥ فأكثر	٤
١٠٠ فأكثر	صفر

ويلاحظ أن التكرار المتجمع الهابط يبدأ بمجموع التكرارات وينتهي بالصفر على عكس التكرار المتجمع الصاعد .

مثال (٢ ـ ٥) :

أوجد التوزيع التكراري المتجمع الهابط للتوزيع التكراري غير المنتظم بجدول (٢ ـ ١١) .

الحــل :

جــدول (٢ ــ ١٥)

التوزيع المتجمع الهابط لدرجات ٣٠ طالباً

حدود دنيا للفئات	تكرار متجمع هابط
صفر فـأكثـــر	٣٠
٣٥ فـأكثـــر	٢٩
٥٠ فـأكثـــر	٢٥
٦٥ فـأكثـــر	١٥
٨٠ فـأكثـــر	٧
٩٠ فـأكثـــر	٢
١٠٠ فـأكثـــر	صفر

من العـرض السابق نـلاحظ أن تكوين الجـداول التكراريـة الصاعـدة أو الهابطة لا تتـأثر بـانتظام أو عـدم انتظام التـوزيع التكـراري كما لا تتـأثر أيضـاً سواءاً كان التوزيع التكراري مفتوحاً أم مقفولاً كما سيتضح فيما بعد .

هـ ــ التوزيعات التكرارية المفتوحة :

التـوزيع التكـراري إما أن يكـون مفتوحـاً من أعلى أو من أسفـل أو من الطرفين معاً .

والتوزيع التكراري المفتوح من أعلى هو التوزيع الذي فيه الحد الأدنى للفئة الأولى غير معلوم أما إذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معلوم فيسمى الجدول في هذه الحالة بالتوزيع التكراري المفتوح من أسفل وفي حالة عدم معرفة الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة في نفس الوقت يسمى الجدول بالتوزيع التكراري المفتوح من الطرفين .

وباستخدام بيانات جدول (٢ ــ ١١) يمكن كتابة التوزيعات التكرارية المفتوحة في الشكل التالي :

جدول (٢ ــ ١٦)

توزيع تكراري مفتوح من أعلى

فئات	تكرار
أقل من ٣٥	١
٣٥ ــ	٤
٥٠ ــ	١٠
٦٥ ــ	٨
٨٠ ــ	٥
٩٠ ــ ١٠٠	٢
المجموع	٣٠

جـدول (٢ ـ ١٧)

توزيع تكراري مفتوح من أسفل

فئـات	تكـرار
صفر ـ	١
٣٥ ـ	٤
٥٠ ـ	١٠
٦٥ ـ	٨
٨٠ ـ	٥
٩٠ فأكثر	٢
المجمـوع	٣٠

جـدول (٢ ـ ١٨)

توزيع تكراري مفتوح من الطرفين

فئـات	تكـرار
أقل من ٣٥	١
٣٥ ـ	٤
٥٠ ـ	١٠
٦٥ ـ	٨
٨٠ ـ	٥
٩٠ فأكثر	٢
المجمـوع	٣٠

ثانياً : التوزيعات التكرارية المزدوجة

Double Frequency Distributions

يحدث في كثير من الأحيان أن يكون أمامنا مجموعتان من القيم تقيس ظاهرتين بينهما علاقة . على سبيل المثال إذا كان لدينا بيانات عن دخل مجموعة من العمال وانفاقهم على السلع والخدمات أو درجات مجموعة من الطلبة في مادتي المحاسبة والاحصاء أو بيانات عن المبيعات والأرباح .

ونلجأ إلى عرض مثل هذه البيانات في جدول مزدوج واحد لدراسة العلاقة بين الظاهرتين ومعرفة التغيّر فيهما . وقد تكون تلك البيانات خاصة بظاهرتين كميتين أو ظاهرتين وصفيتين أو ظاهرة كمية والأخرى وصفية وسوف نركز على الظواهر الكمية في دراستنا في هذا الفصل .

ولعلاج هذه الحالة نقوم بوضع البيانات في جدول توزيع تكراري مزدوج على شكل مستقيم مقسم رأسياً وأفقياً ويبيّن التقسيم الرأسي فئات الظاهرة الأولى بينما يبيّن التقسيم الأفقي فئات الظاهرة الثانية .

مثال (٢ ــ ٦) :

البيانات الآتية توضح درجات ٣٠ طالباً في مادتي المحاسبة (س) والاحصاء (ص) .

س	ص	س	ص	س	ص
٦٠	٧٥	٤٠	٥٠	٣٥	٤٥
٦٥	٨٠	٦٠	٥٠	٥٥	٥٠
٥٥	٦٥	٦٥	٥٥	٦٥	٨٠
٧٠	٧٥	٧٠	٨٥	٥٥	٤٥
٨٠	٩٥	٧٥	٩٥	٨٥	٩٥
٤٠	٥٠	٤٠	٧٥	٩٢	٩٥
٣٥	٤٥	٣٥	٥٠	٤٢	٦٨
٥٥	٧٠	٥٦	٨٤	٤٥	٦٥
٦٠	٨٠	٥٧	٨٠	٥٥	٥٥
٧٥	٨٥	٤٢	٥٨	٦٠	٦٥

الحــل :

لوضع هذه البيانـات في جدول تكـراري مزدوج يلزم أولاً تحـديد فئـات وأطـوال فئات كلتـا الظاهـرتين وبالبحث عن الحـد الأدنى والحد الأعلى لقيم الـظاهـرة (س) فنجـد أنهمـا (٣٥، ٩٢) على التــرتيب ويكـون المــدى بين القيميتن (٥٧) فيمكن تقسيمـه على (٦) فئـات طــول كـل منهــا (١٠) وتكتب على النحـو التالي : ــ

٣٥ ــ ، ٤٥ ــ ، . . . ، ٨٥ ــ ٩٥ .

وبـالبحث عن الحـد الأدنى والحـد الأعلى لقيم الـظاهـرة (ص) فنجـد

أنهما (٤٥، ٩٥) على الترتيب ويكون المدى (٥٠) ونستطيع تقسيمه إلى (٥) فئات طول كل منها (١٠) على النحو التالي :

٤٥ ــ، ٥٥ ــ، . . . . ، ٨٥ ــ ٩٥ .

وبذلك نحصل على مستطيل به مربعات صغيرة نرصد بداخل كل مربع زوج القيم (س ، ص) التي تقع به كما في الجدول التالي :

جـدول (٢ ــ ١٩)
تفريغ قيم الظاهرتين (س ، ص)

فئات س / فئات ص	٣٥ ــ	٤٥ ــ	٥٥ ــ	٦٥ ــ	٧٥ ــ	٨٥ ــ ٩٥
٤٥ ــ	~~////~~		///			
٥٥ ــ	/		/	/		
٦٥ ــ	/	/	///			
٧٥ ــ	/		////	///		
٨٥ ــ ٩٥				/	///	//

ثم بعد ذلك نكتب بداخل كل مربع عدد التكرارات التي رصدناها ونجمع الأعمدة والصفوف فنحصل على الجدول المزدوج في الشكل التالي :

جـدول (٢ ـ ٢٠)

التوزيع التكراري المزدوج لقيم (س ، ص)

ص \ س	٣٥ ـ	٤٥ ـ	٥٥ ـ	٦٥ ـ	٧٥ ـ	٨٥ ـ ٩٥	المجموع
٤٥ ـ	٥		٣				٨
٥٥ ـ	١		١	١			٣
٦٥ ـ	١	١	٣				٥
٧٥ ـ	١		٤	٣			٨
٨٥ ـ ٩٥				١	٣	٢	٦
المجموع	٨	١	١١	٥	٣	٢	٣٠

يمكن استخدام الجدول السابق للحصول على التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في مادة المحاسبة وكذلك التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في مادة الاحصاء في صورة توزيعات تكرارية بسيطة على النحو التالي :

جـدول (٢ ـ ٢١)

التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في المحاسبة

فئات س	التكرار
٣٥ ـ	٨
٤٥ ـ	١
٥٥ ـ	١١
٦٥ ـ	٥
٧٥ ـ	٣
٨٥ ـ ٩٥	٢
المجموع	٣٠

جـدول (٢ ـ ٢٢)

التوزيع الهامشي لدرجات الطلبة في الاحصاء

فئات ص	التكرار
٤٥ ـ	٨
٥٥ ـ	٣
٦٥ ـ	٥
٧٥ ـ	٨
٨٥ ـ ٩٥	٦
المجموع	٣٠

ثالثاً : التوزيعات التكرارية النسبية

Relative Frequency Distributions

نلجأ في كثير من الأحيان إلى استخدام التوزيعات التكرارية النسبية من أجل إجراء المقارنات بين التوزيعات التكرارية والتي تختلف في مجموع التكرارات كما تستخدم كثيراً في الاحصاءات الاستدلالية والتحليلية كما سيأتي فيما بعد . ونحصل على التوزيع التكراري النسبي بتحويل التكرارات إلى نسب باستخدام العلاقة الآتية :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{التكرار الأصلي}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

والتكرار النسبي أقرب ما يكون إلى التعريف الكلاسيكي للاحتمال وسوف نستعرض ذلك باسهاب في الفصول القادمة .

ويمكننا تحويل جميع التوزيعات السابقة إلى جداول تعتمد على التكرارات النسبية بدلاً من التكرارات الأصلية ونأخذ على سبيل المثال :

(١) جدول التوزيع التكراري النسبي الذي يناظر التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً في مادة المحاسبة بجدول (٢ ــ ٢١) يمكن الحصول عليه بقسمة كل التكرارات في الجدول على ٣٠ فنحصل على الجدول التالي :

جـــدول (٢ ــ ٢٣)

التوزيع التكراري النسبي لدرجات ٣٠ طالباً في المحاسبة

فـئــات	تكرار نسبي
٣٥ ــ	,٢٧
٤٥ ــ	,٠٣
٥٥ ــ	,٣٧
٦٥ ــ	,١٧
٧٥ ــ	,١٠
٨٥ ــ ٩٥	,٠٦
المجموع	١,٠٠

(٢) جـدول التـوزيـع التكـراري النسبي الـذي ينـاظـر التـوزيـع التكـراري لـدرجـات ٣٠ طـالبـاً في مـادة الاحصـاء بجـدول (٢ ــ ٢٢) يمكن الحصول عليه بقسمة كل التكرارت في الجدول على ٣٠ أيضاً فنحصل على:

جـــدول (٢ ــ ٢٤)

التوزيع التكراري النسبي لدرجات ٣٠ طالباً في الاحصاء

فـئــات	تكرار نسبي
٤٥ ــ	,٢٧
٥٥ ــ	,١٠
٦٥ ــ	,١٦
٧٥ ــ	,٢٧
٨٥ ــ ٩٥	,٢٠
المجموع	١,٠٠

ويمكننا استخدام التكرار النسبي في إيجاد التوزيعات التكرارية النسبية المتجمعة الصاعدة والهابطة كما سبق باستخدام التكرارات الأصلية وعلى سبيل المثال يمكن تكوين جدول التكرار النسبي الصاعد من التوزيع التكراري النسبي بجدول (٢ ــ ٢٤) على النحو التالي :

جدول (٢ ــ ٢٥)

التوزيع التكراري النسبي الصاعد

حدود عليا للفئات	تكرار نسبي متجمع صاعد
أقل من ٤٥	صفر
أقل من ٥٥	,٢٧
أقل من ٦٥	,٣٧
أقل من ٧٥	,٥٣
أقل من ٨٥	,٨٠
أقل من ٩٥	١,٠٠

تمارين الفصل الثاني

(١) فيما يلي بيان بقيمة مبيعات إحدى المحلات التجارية خلال شهر سبتمبر ١٩٨٥ والقيم بآلاف الجنيهات .

٨٥	٨٩	٦٦	٧٤	٧٦	٨٧
٦٠	٨١	٩٧	١٠١	٨٤	٨٦
٧١	٦٦	٨٥	٨٩	٨٦	٩٩
١٠٣	١١٠	٨٩	٨٥	٥٥	٩٣
٨٧	٧٥	١٠٦	١٠١	٩٢	٨٢

والمطلوب :

أ - إعداد جدول توزيع تكراري لهذه القيم .

ب - عدد الأيام التي كانت تقل فيها قيم المبيعات عن ٩٠ ألف جنيه .

جـ- عدد الأيام التي كانت تزيد فيها قيم المبيعات عن ٨٠ ألف جنيه .

د - أوجد التوزيع التكراري النسبي .

(٢) سجلت أطوال ٤٠ من أوراق نبات معيّن إلى أقرب ملليمتر :

١٥٧	١٤٩	١٢٥	١٤٤	١٣٢	١٥٠	١٦٤	١٣٨
١٤٤	١٥٢	١٤٨	١٣٦	١٤٧	١٤٠	١٥٨	١٤٦
١٦٥	١٥٤	١١٩	١٦٣	١٧٦	١٣٨	١٢٦	١٦٨
١٣٥	١٤٠	١٥٣	١٣٥	١٤٧	١٤٢	١٧٣	١٤٦
١٢٨	١٤٥	١٥٦	١٥٠	١٤٢	١٣٥	١٤٥	١٦١

والمطـلوب :

أ - تكوين التوزيع التكراري للأطوال .

ب - إيجاد جدول التكرار المتجمع الصاعد والهابط .

جـ - أوجد التوزيع النسبي الصاعد والهابط .

(٣) إذا كان لدينا عينة من ٣٠ مفـردة لدراسـة العلاقـة بين عمر الـزوج (س) وعمر الزوجة (ص) :

س	ص	س	ص	س	ص
٢٨	٣٢	٢٣	٣٨	١٧	٥٠
٢٣	٤٣	١٧	٤٦	١٧	٤٨
٣٠	٤٤	٢٢	٤١	٢٥	٤٢
١٨	٢٥	٢٣	٥٠	١٦	٤٣
١٩	٣٤	١٨	٣٦	٢٩	٣١
٢٤	٣٩	٢٩	٢٥	٢٢	٤٢
٢٤	٥٠	٢٥	٣٧	١٧	٢٤
١٩	٢٤	٢٣	٣٩	٢٣	٤٩
٢٣	٢٨	٢٧	٣٢	٢٠	٤٨
٢١	٤٩	٢٣	٤٣	٢٧	٣١

المطلوب إيجاد التوزيع التكراري المزدوج لعمر الزوج والزوجة ثم اشتق التوزيع الهامشي لعمر الزوج والتوزيع الهامشي لعمر الزوجة .

(٤) فيما يلي درجات أربعين طالباً في مادة المحاسبة (النهاية العظمى ١٠٠) .

٩٣	٧٩	٨١	٩٩	٩٣	٨٨	٨٨	٩٢
٧٥	٨٧	٩٦	٨٢	٩٢	٧٦	٩٥	٧٩
٨٨	٨٩	٧٤	٩٤	٩٠	٩٧	٧٣	٧٤
١٩	٩٦	٨٩	٩٩	٩١	٩٧	٨٤	٦٧
٩٥	٧١	٨٦	٦٢	٩٦	٧٠	١٠٠	٦٨

والمطلوب :

أ - ايجاد التوزيع التكراري المنتظم طول فئاته ١٠ درجات ومبتدأ الفئة الأولى بالدرجة ٦٠ .

ب - ايجاد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

جـ - ايجاد نسبة عدد الطلبة الحاصلين على أكثر من ٨٠ ٪ من الدرجات .

د - ايجاد نسبة عدد الطلبة التي تتراوح درجاتهم بين ٦٠ ــ ٨٠ درجة .

(٥) سجلت أوزان عينة من ٤٠ عاملاً في أحد المصانع لأقرب رطل على النحو التالي :

١٤٥	١٤٥	١٧٥	١٥٠	١٥٤	١٥٧	١٤٨	١٧٣
١٤٢	١٦٠	١٤٥	١٣٥	١٤٦	١٨٦	١٥٢	١٣٨
١٥٦	١٥٥	١٥٩	١٥٨	١٧٣	١٥٧	١٧٤	١٤٦
١٢٨	١٦٧	١٦٢	١٢٩	١٤٥	١٧٠	١٦٨	١٦٨
١٧١	١٥٤	١٦٤	١٦٣	١٤٢	١٥٠	١٣٦	١٥٦

والمطلوب :

أ - تكوين توزيع تكراري منتظم لأوزان العمال طول فئاته ١٠ أرطال ومبتدأ الفئة الأولى بالرطل ١٢٨ .

ب - ايجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

جـ- ايجاد نسبة عدد العمال التي تنحصر أوزانهم بين (١٣٨ ، ١٥٨) .

د - ايجاد التوزيع التكراري النسبي لأوزان العمال .

(٦) أوجد القيم المفقودة من الجدول التالي : ـ

الفئـات	التكـرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار النسبي
٥ ـ	ـ	ـ	ـ
٦ ـ	١٩	٢٧	ـ
٧ ـ	ـ	ـ	,٣٥
٨ ـ	١٥	ـ	,١٥
٩ ـ	ـ	٩١	ـ
١٠ ـ ١١	ـ	ـ	ـ
المجموع	١٠٠		١

(٧) تمّ تسجيل ٢٠ طالباً بقسم اللغات الأجنبية وكان تخصصهم الأساسي على النحو التالي : ـ

اسباني	فرنسي	روسي	الماني	الماني
اسباني	اسباني	روسي	الماني	ايطالي
فرنسي	الماني	فرنسي	اسباني	الماني
ايطالي	الماني	الماني	روسي	اسباني

والمطـلوب :

أ ـ تكوين جدول التوزيع التكراري .

ب ـ تكوين الجدول التكراري النسبي

الفصل الثالث

التمثيل البياني

Graphical Presentation

مقـــدمـــة

بعد عملية جمع البيانات وتبويبها في صورة تـوزيعات تكـرارية مختلفـة تأتي مرحلة معالجتها بيانياً في صورة سهلة يسهل فهمهـا ومعرفـة مدلـولها ممـا يسـاعد النـاس على اختـلاف مستـويـاتهم للتعـرف على الاتجـاه العـام لهـذه التوزيعات بغـرض تحليل البيـانات بـطريقة علميـة سليمة يمكن على أسـاسها اتخاذ القرارات المناسبة .

وتختلف طـرق التمثيـل البيـاني بـاختـلاف نـوع البيـانـات ففي حــالـة التـوزيعات التكـرارية البسيـطة غير المبـوبة والتي تشمـل السـلاسـل الـزمنيـة للظواهر المختلفة كما أوضحنا في الفصل السابق هنـاك طرق عـديدة لتمثيلهـا أهمها :

(١) طريقة الأعمدة أو المستطيلات . (٢) طريقة الدوائر .

(٣) طريقة الخط البياني .

أما التوزيعات التكرارية المبوبة على صورة فئـات وتكرار فيستخـدم في تمثيلها الطرق الآتية :

(١) المدرج التكراري .

(٢) المضلع التكراري .

(٣) المنحنى التكراري .

(٤) المنحنيات التكرارية المتجمعة الصاعدة والهابطة .

أولاً : التمثيل البياني للبيانات غير المبوبة

أ ـ طريقة الأعمـدة أو المستطيلات Bar Chart :

(١) في حالة ظاهرة واحدة :

مثال (٣ ـ ١) :

الجدول التالي يوضح صادرات مصر من القطن خلال عـدة سنوات والقيم تقديرية بالمليون جنيه والمطلوب عرض هذه البيانات باستخدام طريقة المستطيلات .

السنـة	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
قيمة الصادرات	٢٠	٢٥	١٥	٢٢	٣٠

ولعـرض مثل هـذه البيانـات باستخـدام طـريقـة المستـطيـلات نعلم أن مسـاحـة المستـطيـل = القـاعـدة × الارتفـاع . وفي هـذه الـطريقـة يجب أن تتنـاسب الارتفاعـات مع مـا تدل عليـه من أرقـام ولـذلـك حتى تكـون صـورة التمثيـل صـادقـة يجب أن يكـون عـرض الأعمـدة أو قـواعـد المستـطيـلات متساوية .

ولعرض مثل هذه البيانات نتبع الخطوات التالية :

١ ـ نـرسم محـورين متعـامـدين المحـور الأفقي ويسمى بـالمحـور السيني

ويخصص دائمــاً للمتغير المستقــل ســواء كــان سنــوات أو فئــات ، والمحور الرأسي ويسمى بالمحور الصـادي ويخصص دائماً للتكـرارات أو لقياس ظاهرة ما مثل التغير في قيمة الصادرات .

١ ـ استخدام مقياس رسم مناسب لتقسيم المحورين .

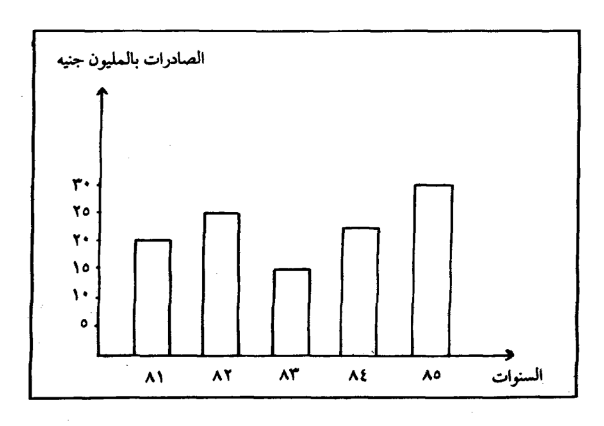
٢ ـ تقام المستطيلات للتعبير عن الارتفاعات النسبية للظاهرة محل الدراسـة ويراعى أن تكون قواعد الأعمـدة أو المستطيـلات متساويـة كما يـراعى أن نترك مسافات متساوية بين كل مستطيلين .

٤ ـ يحاط الشكل بإطار ويـوضع فـوق الشكل بيـان برقمـه وملخص لطبيعـة البيانات التي يمثلها . ويتضح ذلك في الشكل التالي :

شــكل (٣ ـ ١)

القيمة التقديرية لصادرات مصر بالمليون جنيه

في الفترة (١٩٨١ ـ ١٩٨٥)



(٢) في حالة أكثر من ظاهرة :

إذا كان المطلوب استخدام طريقة المستطيلات لعرض ظاهرتين أو أن هناك ظاهرة واحدة مجزأة إلى مكوناتها مثل الدخل القومي (زراعة ـ صناعة ـ سياحة ـ . . . .) فنستخدم إحدى طريقتين ، المستطيلات المتلاصقة أو المستطيلات المجزأة .

طريقة المستطيلات المتلاصقة :

مثال (٣ ـ ٢) :

الجدول التالي يوضح القيم التقديرية لصادرات مصر والسودان بالمليون جنيه خلال عدة سنوات والمطلوب عرضها بشكل مناسب .

السنة	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
صادرات مصر	٢٠	٢٥	١٥	٢٢	٣٠
صادرات السودان	١٠	١٢	١٧	٢٠	٢٥

لعرض هذه البيانات باستخدام المستطيلات المتلاصقة نستخدم نفس الخطوات السابقة ونفس مقياس الرسم بالنسبة للمحور الصادي (كل ١ سم يمثل ٥ مليون جنيه) أما بالنسبة للمحور السيني فنجعل كل سنة ممثلة بمستطيلين متلاصقين أحدهما لصادرات مصر والآخر لصادرات السودان ونترك مسافات متساوية أيضاً بين مستطيلات كل سنة كما يتضح في شكل (٣ ـ ٢) .

شــكل (٣ ـ ٢)

القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان باستخدام طريقة المستطيلات المتلاصقة

طريقة المستطيلات المجزأة :

لعرض بيانات مثال (٣ ــ ٢) باستخدام المستطيلات المجزأة نقوم بايجاد مجموع صادرات مصر والسودان لجميع السنوات كما في الجدول التالي :

جدول (٣ ــ ١)

القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان

السنة	صادرات مصر	صادرات السودان	اجمالي الصادرات
١٩٨١	٢٠	١٠	٣٠
١٩٨٢	٢٥	١٢	٣٧
١٩٨٣	١٥	١٧	٣٢
١٩٨٤	٢٢	٢٠	٤٢
١٩٨٥	٣٠	٢٥	٥٥

ونأخذ مقياس الرسم على النحو التالي :

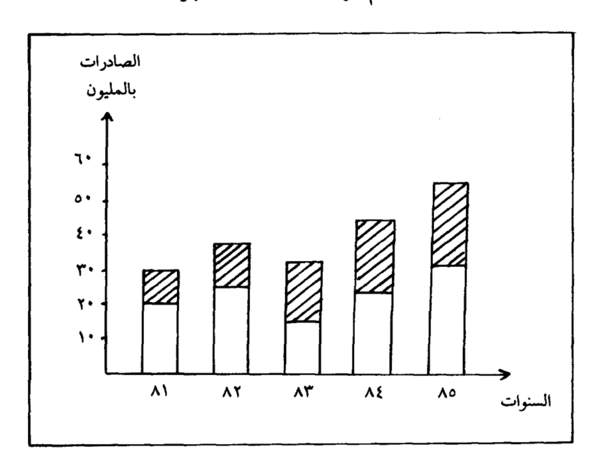
ــ المحور الرأسي : ويمثل الصادرات وكل ١ سم يمثل ١٠ مليون جنيه .

ــ المحور الأفقي : ويمثل السنوات وكل سنة تمثل بمستطيل واحد قاعدته ١ سم يمثل إجمالي الصادرات ثم يجزأ كل مستطيل إلى قسمين أحدهما لصادرات مصر والآخر لصادرات السودان ونترك مسافة ١ سم بين كل مستطيلين كما يتضح في شكل (٣ ــ ٣) .

شــكل (٣ ــ ٣)

القيمة التقديرية لصادرات مصر والسودان

باستخدام طريقة المستطيلات المجزأة



مثـال (٣ ــ ٣) :

الجـدول التالي يـوضح السكـان غير الكـويتين المولـودين في الكـويت حسب النوع ومجموعات الدول .

مجموعات الدول	١٩٧٥		١٩٨٠	
	ذكـور	انــاث	ذكـور	انــاث
الدول العربية	٧٢,٣١٥	٦٩,٢٨١	١٠٣,٧٩١	١٠٠,١١٤
الدول الآسيوية	٧,٢٢٤	٧,١٩٣	١٢,٧٠٥	١٢,١٥٩
الدول الاخرى	١٩٤	٢٠٨	٢٣٣	٢٧١

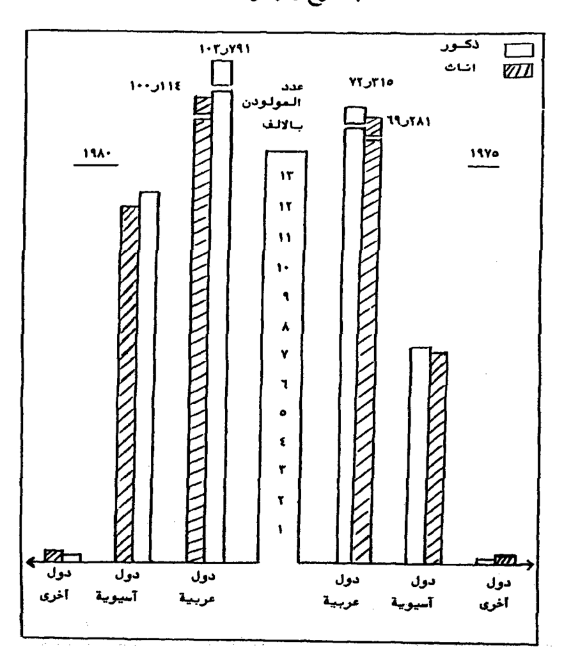
الحــل :

باستخدام طـريقة المستـطيلات المتـلاصقة يمكن تمثيـل بيانـات المثال السـابق في اتجـاهين . الاتجـاه الأيمن يمثـل بيـانـات سنـة ١٩٧٥ والاتجـاه الأيسر يمثل بيانات سنة ١٩٨٠ ، كما يوضحه شكل (٣ ــ ٤) .

شــكل (٣ ــ ٤)

السكان غير الكويتيين المولودين في الكويت

حسب النوع ومجموعات الدول



ملاحظة : يتضح من شكل (٣ ــ ٤) أنه عندما يكون هناك قيم كبيرة كما هو الحال في حالة الدول العربية في سنتي ١٩٧٥ ، ١٩٨٠ بالمقارنة بالدول الأخرى استخدمنا فكرة المستطيلات المقطوعة من أعلى وذلك حتى يمكن الحصول على شكل مناسب .

ب ــ طريقة الدوائر :

بالرغم من بساطة وسهولة طريقة المستطيلات إلاَّ أن طريقة الدوائر تستخدم لنفس الغرض لخدمة بعض الدارسين ففي حالة ظاهرة واحدة كما في مثال (٣ ــ ١) يمكن تمثيلها بدائرة واحدة مقسمة إلى قطاعات كل قطاع يمثل صادرات إحدى السنوات ، وحيث أن مساحة القطاع تتناسب مع زاوية رأسه فنقسم الدائرة إلى قطاعات تكون الزاوية المركزية لكل منها متناسبة مع حجم الفئة التي يمثلها هذا القطاع وذلك باتباع الخطوات التالية :

١ ــ نوجد النسبة المئوية لكل قطاع من مجموع القطاعات .

٢ ــ نضرب النسبة المئوية لكل قطاع في ٣,٦° (وهو المقدار الذي يخص كل ١٪) فنحصل على الزاوية المركزية لكل قطاع .

٣ ــ نرسم دائرة مناسبة ونقسمها إلى القطاعات المختلفة .

أما في حالة ظاهرتين أو أكثر فنمثل كل ظاهرة بدائرة ونستخدم نفس الخطوات السابقة مع مراعاة أن تعكس كل دائرة حجم الظاهرة الكلي التي تمثلها ومن أجل ذلك يجب أن تتناسب مساحات الدوائر مع الحجم الكلي لكل ظاهرة .

حيث أن :

$$\frac{\text{الحجم الكلي للظاهرة الأولى}}{\text{الحجم الكلي للظاهرة الثانية}} = \frac{\text{ط نق}_1^2}{\text{ط نق}_2^2} = \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_2^2}$$

حيث :

$نق_1$	هو نصف قطر الدائرة الأولى
$نق_2$	هو نصف قطر الدائرة الثانية
ط	مقدار ثابت

وبمعرفة النسبة بين نصفي القطرين وبافتراض نصف قطر لإحدى الدائرتين يمكن معرفة نصف القطر الآخر كما يتّضح في المثال التالي : ـ

مثال (٣ ـ ٤) :

الجدول التالي يوضح معدل الوفيات في كل من مصر وانجلترا في الفترة من ١٩٨٠ إلى ١٩٨٣ والمطلوب تمثيلها بيانياً باستخدام الدوائر .

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	المجموع
معدل الوفيات في مصر	٢٩	٢٧	٢٣	٢١	١٠٠
معدل الوفيات في انجلترا	١٤	١٣	١٢	١١	٥٠

سوف يكون لدينا دائرتان إحداهما لوفيات انجلترا والاخرى لوفيات مصر ولتحديد نصف قطر كل منهما .

$$\frac{نق_1^2}{نق_2^2} = \frac{\text{مجموع وفيات انجلترا}}{\text{مجموع وفيات مصر}} = \frac{٥٠}{١٠٠}$$

$$\therefore نق_1 : نق_2 = ١ : ١,٤$$

فإذا افترضنا أن نصف قطر الدائرة الأولى التي تمثل وفيات انجلترا $نق_1$ = ٤ سم مثلاً فإن $نق_2$ = ٥,٦ سم .

بعد ذلك نأخذ كل ظاهرة على حدة لتحديد الزاوية المركزية لكل قطاع فنحصل على الجدولين التاليين :

جدول (٣ ـ ٢)

حساب الزوايا المركزية لقطاعات انجلترا

السنة	معدل وفيات انجلترا	النسبة ٪	زاوية كل قطاع
١٩٨٠	١٤	٢٨	١٠٠,٨°
١٩٨١	١٣	٢٦	٩٣,٦°
١٩٨٢	١٢	٢٤	٨٦,٤°
١٩٨٣	١١	٢٢	٧٩,٢°
المجموع	٥٠	١٠٠	٣٦٠°

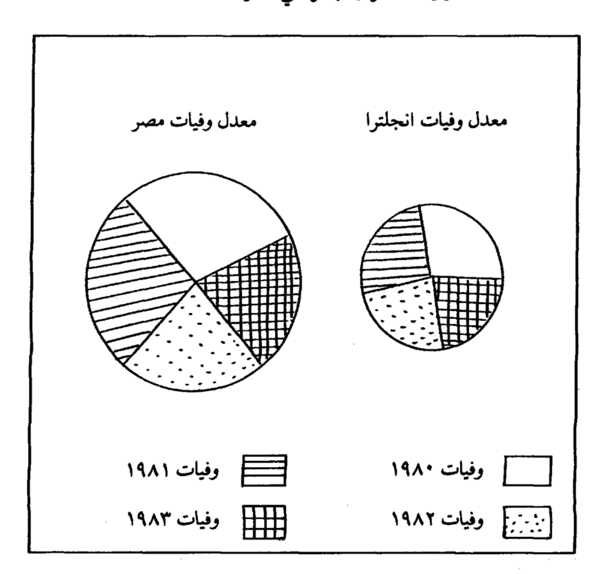
جدول (٣ ـ ٢)

حساب الزوايا المركزية لقطاعات مصر

السنة	معدل وفيات مصر	النسبة٪	زاوية كل قطاع
١٩٨٠	٢٩	٢٩	١٠٤,٤°
١٩٨١	٢٧	٢٧	٩٧,٢°
١٩٨٢	٢٣	٢٣	٨٢,٨°
١٩٨٣	٢١	٢١	٧٥,٦°
المجموع	١٠٠	١٠٠	٣٦٠°

شكل (٣ ــ ٥)

معدل وفيات مصر وانجلترا في الفترة ١٩٨٠ ــ ١٩٨٣



جـ ــ الخط البياني :

تستخدم خريطة الخط البياني لتوضيح الظواهر التي تقاس على صورة سلسلة زمنية مثل صادرات أو واردات بلد ما من سلعة معينة أو اعداد السكان خلال التعدادات السكانية في سنوات متعاقبة أو حجم المبيعات أو أرباح إحدى الشركات في عدة شهور أو سنوات متتالية . وتتلخص خطواتها

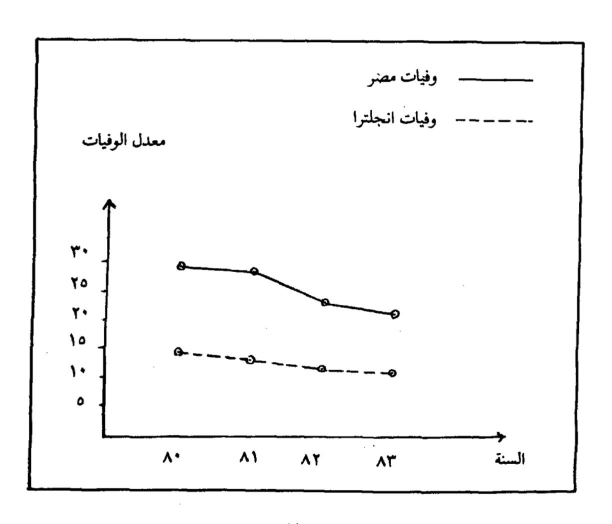
في رسم المحورين المتعامدين وتحديد مقياس الرسم المناسب ثم تحديد النقط التي تمثل تطور الظاهرة وبتوصيل هذه النقط بخطوط مستقيمة نحصل على الخط البياني المطلوب . ويمكن استخدام الخط البياني لتمثيل ظاهرة واحدة أو ظاهرتين .

مثال (٣ ــ ٥) :

استخدم طريقة الخط البياني في عرض البيانات الخاصة بمعدلات الوفيات بمصر وانجلترا في مثال (٣ ــ ٤) . باستخدام الخطوات السابقة نحصل على الشكل التالي :

شكل (٣ ــ ٦)

معدلات الوفيات التقديرية بمصر وانجلترا



مثال (٣ ــ ٦) :

الجدول التالي يوضح قيمة الصادرات والواردات والميزان التجاري بالمليون دينار في دولة الكويت عن المدة ٧٤ ــ ١٩٨٢ :

السنة	جملة الصادرات	جملة الواردات	الميزان التجاري
١٩٧٤	٣,٢١٥	٤٥٥	٢,٧٦٠
٧٥	٢,٦٦٣	٦٩٣	١,٩٧٠
٧٦	٢,٨٧٤	٩٧٢	١,٩٠٢
٧٧	٢,٧٩٣	١,٣٨٧	١,٤٠٧
٧٨	٢,٨٦٤	١,٢٦٤	١,٦٠٠
٧٩	٥,٠٨٩	١,٤٣٧	٣,٦٥٢
٨٠	٥,٥٢٧	١,٧٦٥	٣,٧٦٢
٨١	٤,٥٣١	١,٩٤٥	٢,٥٨٦
٨٢	٣,١٢٨	٢,٣٨٥	٧٤٣

الحـل : باستخدام فكرة الخط البياني يمكن تمثيل الصادرات بخط بياني وكذلك الواردات والفرق بينهما يعطي الميزان التجاري كما يوضحه الشكل التالي .

شـكل (٣ ـ ٧)

قيمة الصادرات والواردات والميزان التجاري

ثانياً : التمثيل البياني للبيانات المبوبة

أ ــ المدرج التكراري Histogram :

المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة تتناسب قواعدها مع أطوال الفئات وتتناسب ارتفاعاتها مع تكرار كل فئة .

(١) المدرج التكراري للتوزيعات المنتظمة :

إذا كان التوزيع التكراري منتظماً أي فئاته متساوية . نتبع الخطوات التالية لرسم المدرج التكراري :

١ ــ نرسم محورين متعامدين ، المحور السيني يمثل الفئات والمحور الصادي يمثل التكرار .

٢ ــ تحديد مقياس الرسم المناسب بالنظر إلى أكبر تكرار .

٣ ــ بعد تقسيم المحور الأفقي إلى الفئات المتساوية نقيم على كل فئة مستطيلاً ارتفاعه يناظر التكرار المقابل له بحيث تكون جميع المستطيلات متلاصقة .

مثال (٣ ــ ٧) :

الجدول التالي يوضح توزيع عدد من العمال وفقاً لأجورهم الشهرية .

فئات الأجر	عدد العمال
٢٠ ــ	٣
٣٠ ــ	٧
٤٠ ــ	١٢
٥٠ ــ	٦
٦٠ ــ ٧٠	٢

والمطلوب رسم المدرج التكراري .

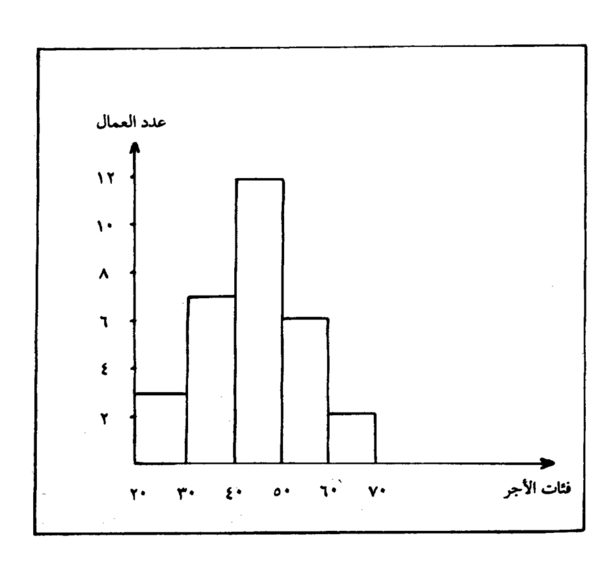
باتباع الخطوات السابقة وباختيار مقياس الرسم على النحو التالي :

المحور الرأسي : يمثل عدد العمال وكل ١ سم يمثل عدد ٢ عامل .

المحور الأفقي : يمثل الفئات ونبدأ نقطة الأصل ببداية الفئات وهي ٢٠ ، ثم نجعل كل ١ سم يمثل ١٠ ، ثم نرسم المستطيلات المتلاصقة كما يتضح في الشكل التالي :

شكل (٣ ـ ٨)

المدرج التكراري لأجور عدد من العمال



ويلاحظ على المدرج التكراري ما يلي :

١ ــ يلاحظ أننا ألصقنا المستطيل بالمحور الرأسي ولقد حرصنا على ذلك لتجنب الوقوع في الخطأ عند تحديد مقياس الرسم للمحور الأفقي ، ويمكننا أن نترك مسافة بين المستطيل الأول والمحور الرأسي إذا اعتبرنا نقطة الأصل كما هي ونأخذ كل ١ سم يمثل ١٠ جنيهات .

٢ ــ يلاحظ أن مساحة المستطيل هي التي تمثل التكرار وحيث أن قواعد المستطيلات متساوية فيمكن أن يؤخذ الارتفاع وحده كمؤشر للمقارنة لأن مساحة المستطيل = الطول × العرض .

وحيث أن عرض المستطيلات ثابت فإنه يمكن التعبير عن النسب بين المساحات بالأطوال فقط .

٣ ــ في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من أسفل أو من أعلى أو من الطرفين نتبع نفس الخطوات السابقة مع اهمال الفئات المفتوحة ، وفي بعض الأحيان قد يصادف الباحث جداول تكرارية مفتوحة يمكن تحديد الحد الأدنى للفئة الأولى فيها إذا كان الجدول مفتوحاً من أعلى وتحديد الحد الأدنى للفئة الأخيرة إذا كان الجدول مفتوحاً من أسفل .

(٢) المدرج التكراري للتوزيعات غير المنتظمة :

في هذه الحالة تكون الفئات غير متساوية ولا تعبر الارتفاعات عن التكرارات ويلزم قبل البدء في الرسم الحصول على التكرارات المعدلة باستخدام العلاقة التالية :

التكرار المعدل = التكرار الأصلي ÷ طول الفئة

ونستخدم نفس الخطوات السابقة مع الأخذ في الاعتبار اختلاف اطوال الفئات على المحور الأفقي .

مثال (٣ ــ ٨) :

المطلوب تمثيل التوزيع التكراري بمدرج تكراري :

الفئة	٥ ــ	١٠ ــ	٢٠ ــ	٣٠ ــ	٣٥ ــ	٤٥ ــ ٦٥
التكرار	٥	٢٠	٤٠	٢٥	٢٠	١٥

الحــل :

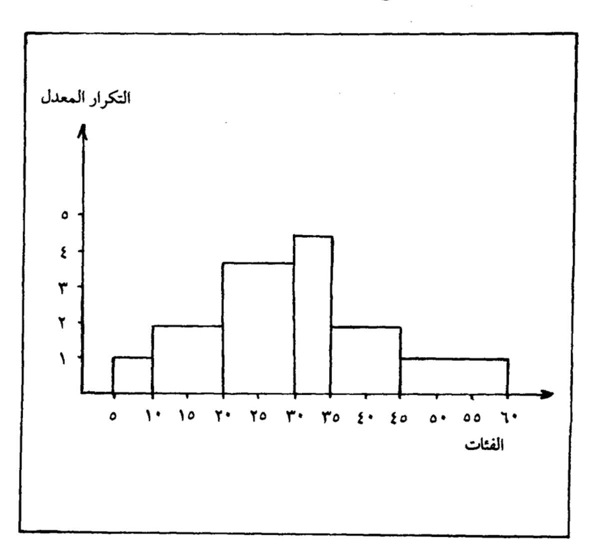
يلاحظ اختلاف اطوال الفئات ونبدأ بإيجاد التكرارات المعدلة كما في الجدول التالي :

فئــات	تــكــرار	طـول الفئة	التكرار المعدل
٥ ــ	٥	٥	١
١٠ ــ	٢٠	١٠	٢
٢٠ ــ	٤٠	١٠	٤
٣٠ ــ	٢٥	٥	٥
٣٥ ــ	٢٠	١٠	٢
٤٥ ــ ٦٠	١٥	١٥	١

ثم نرسم التكرارات المعدلة بنفس الخطوات السابقة كما يظهر في شكل (٣ ــ ٩) .

شـكل (٣ ـ ٩)

المدرج التكراري للتوزيع غير المنتظم



ويلاحظ أننا يمكننا استخدام التكرارات المعدلة للمقارنة بدلاً من المساحات . والجدير بالذكر أن للمدرج التكراري استخدامات عديدة أهمها على الاطلاق استخدامه في حساب المنوال كما سيأتي فيما بعد .

ب ـ المضلع التكراري Frequency Polygon :

المضلع التكراري هو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات أو الواصل بين منتصفات القواعد العليا للمدرج التكراري . يتضح من هذا التعريف ، أنه يمكن رسم المضلع التكراري بإحدى طريقتين .

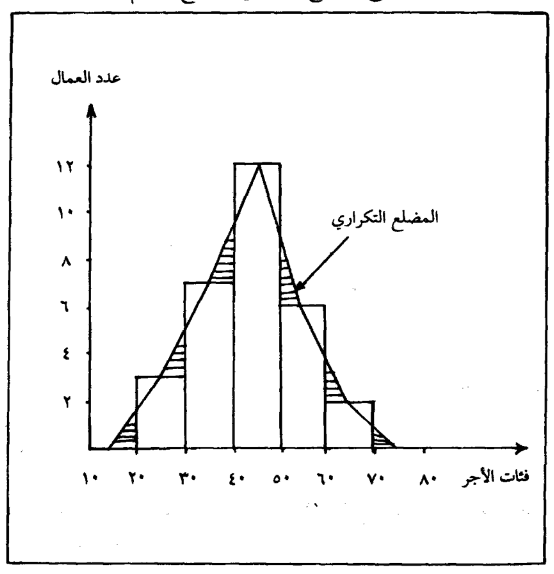
(١) طريقة غير مباشرة باستخدام المدرج التكراري .

أي بعد رسم المدرج التكراري يمكننا رسم المضلع التكراري عن طريق تنصيف القواعد العليا لكل المستطيلات التي يتكون منها المدرج ثم نصل بين هذه المنصفات بخطوط مستقيمة (يلاحظ أن منصفات القواعد العليا تناظر مراكز الفئات) .

وعلى سبيل المثال يمكننا تحديد المضلع التكراري لمثال (٣ ــ ٧) بالاستعانة بشكل (٣ ــ ٨) كما يتضح في الشكل التالي : ــ

شــكل (٣ ــ ١٠)

المدرج والمضلع التكراري للتوزيع المنتظم



ويلاحظ في شكل (٣ ـ ١٠) ما يلي :

ـ مساحة المثلثات التي أضيفت للمدرج = مساحة المثلثات التي قطعت منه وعليه إذا كان التوزيع التكراري منتظماً فإن :

مساحة المدرج التكراري = مساحة المضلع التكراري

ـ نلاحظ أننا أوصلنا طرفي المضلع التكراري بالمحور الأفقي نظراً لأن التكرار لكل من الفئة قبل الأولى والفئة بعد الأخيرة مساوٍ للصفر ومن ثم أكملنا الخطوط المستقيمة حتى منتصف هاتين الفئتين .

ويستخدم المضلع التكراري في مقارنة التوزيعات التكرارية بيانياً . وحتى تسهل عملية المقارنة يكون من الأفضل تمييز كل مضلع تكراري عن الآخر بإحدى وسائل الرسم المناسبة . كذلك يفضل استخدام التكرارات النسبية بدلاً من التكرارات المطلقة عندما يختلف المجموع الكلي للتكرارات بشكل واضح في التوزيعات موضع المقارنة .

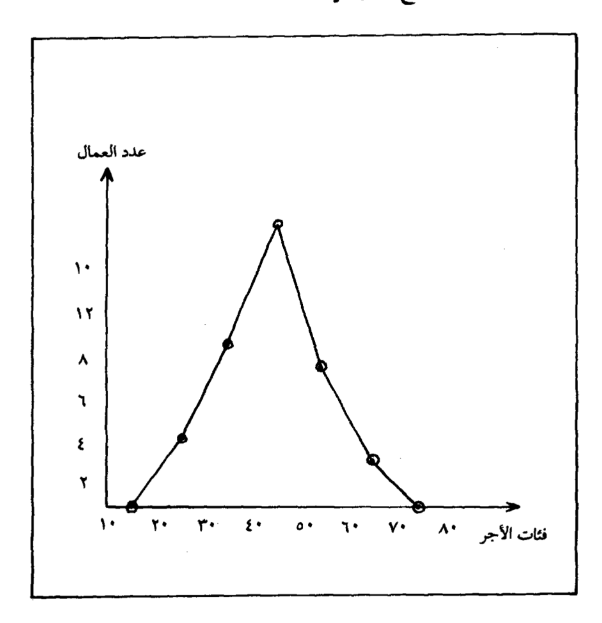
(٢) طريقة مباشرة باستخدام مراكز الفئات :

بعد حساب مراكز الفئات نرسم المحورين المتعامدين ونحدد النقاط التي تكون احداثياتها الأفقية هي مراكز الفئات وإحداثياتها الرأسية هي التكرارات المناظرة (في حالة التوزيعات المنتظمة) أو التكرارات المعدلة (في حالة التوزيعات غير المنتظمة) وبتوصيل هذه النقط بخطوط مستقيمة نحصل على المضلع التكراري .

وعلى سبيل المثال يمكننا رسم المضلع التكراري مباشرة لمثال (٣ ـ ٧) في الشكل التالي .

شـكل (٣ ــ ١١)

المضلع التكراري لأجور عدد من العمال



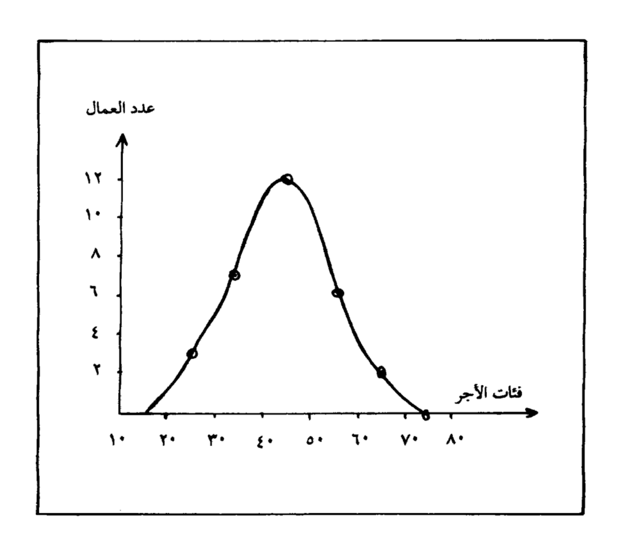
جـ ــ المنحنى التكراري Frequency Curve :

المنحنى التكراري هو الخط الممهد الواصل بين مراكز الفئات أو منتصفات القواعد العليا للمستطيلات التي يتكون منها المدرج التكراري ، ويمكن الحصول على المنحنى عن طريق تمهيد جميع النقط باليد أو باستخدام قواعد هندسية بسيطة .

ويلاحظ أننا يمكننا رسم المنحنى التكراري بطريقتين كما هو الحال عند رسم المضلع التكراري . وعلى سبيل المثال شكل (٣ ــ ١٢) يوضح المنحنى التكراري لأجور عدد من العمال .

شـــكل (٣ ــ ١٢)

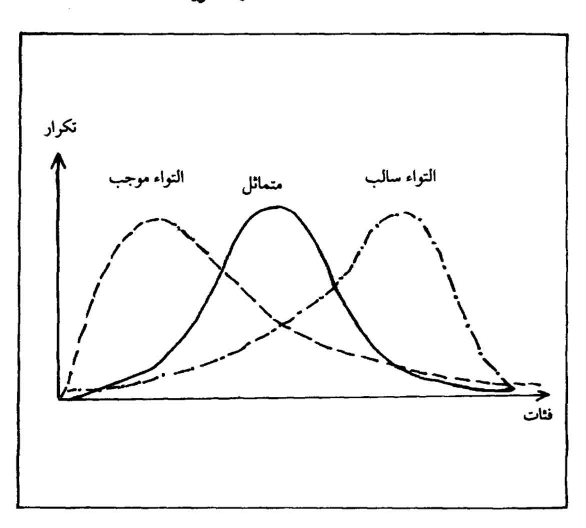
المنحنى التكراري لأجور عدد من العمال



والمنحنى التكراري قد يكون متماثـل يأخـذ شكل الجـرس أو الناقـوس مثـل المنحنى الطبيعي أو المعتـاد أو يكون غيـر متماثـل (ملتوِ جهـة اليمين أو جهة اليسار) كما يتضح في شكل (٣ ــ ١٣) .

شـكل (٣ ـ ١٣)

المنحنيات المتماثلة والملتوية



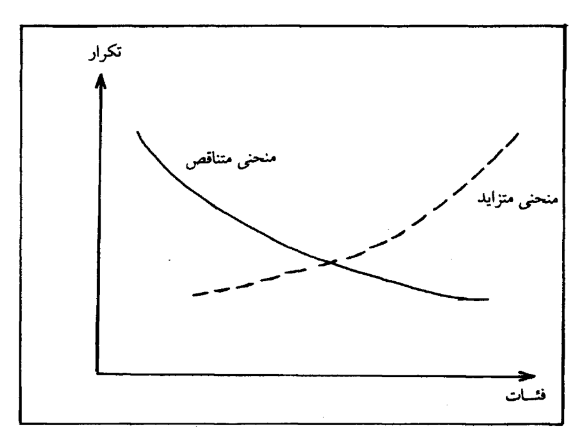
والمنحنى المتماثل هو ذلك المنحنى الذي إذا اسقطنـا من قمته عمـوداً فإنه يقسم المنحنى إلى قسمين متسـاويين وأحيانـاً يطلق البعض اسم المنحنى مـوجب الالتـواء على المنحنى الملتـوي جهـة اليمين ، والمنحنى سـالب الالتواء على المنحنى الملتوي جهة اليسار .

وهنـاك أنواع كثيـرة للمنحنيات منهـا مثلاً المنحنيـات المتزايـدة باطـراد والمنحنيات المتناقصة باطراد .

وشكل (٣ ــ ١٤) يوضح هذه الأنواع

شـكل (٣ ــ ١٤)

المنحنيات المتزايدة والمتناقصة



وسـوف نوضـح كيفيـة رسم مثـل هـذه المنحنيـات في دراستنـا التـاليـة للمنحنيات المتجمعة .

د ــ المنحنيات التكرارية المتجمعة Cumulative Frequency Curves :

(١) المنحنى التكراري المتجمع الصاعد :

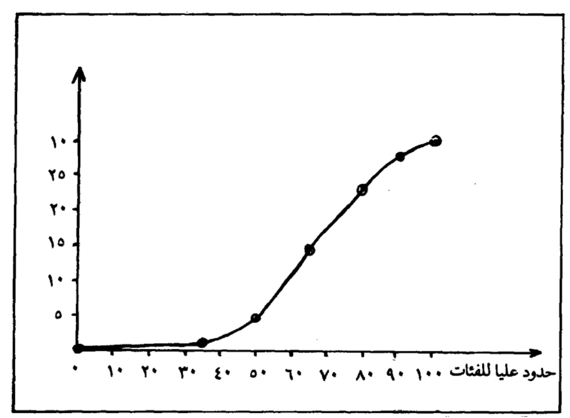
يلزم أولاً لـرسم هـذا المنحنى تكـوين الجـدول التكـراري المتجمـع الصاعد كما سبق في الفصل السـابق ثم نرسم المحـور الأفقي ليمثل الحـدود العليا للفئات والمحـور الرأسي ليمثـل التكرارات المتجمعـة الصاعـدة ويجب مراعاة مقياس الرسم المناسب .

فمثـلاً إذا أردنـا رسم المنحنى للتـوزيـع التكـراري المتجمـع الصـاعـد

لـدرجات ٣٠ طـالباً بجـدول (٢ ــ ١٣) نأخـذ على المحور الـرأسي والـذي يمثـل التكـرار المتجمـع الصـاعـد كـل ١ سم يمثـل ٥ طلبـة كمـا يتضـح في الشكل التالي :

شــكل (٣ ــ ١٥)

المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لدرجات ٣٠ طالباً



وللمنحنى التكـراري المتجمع الصـاعد أو الهـابط استخدامـات عديـدة كما سيتضح فيما بعد في حساب الوسيط ونصف المدى الربيعي .

(٢) المنحنى التكراري المتجمع الهابط :

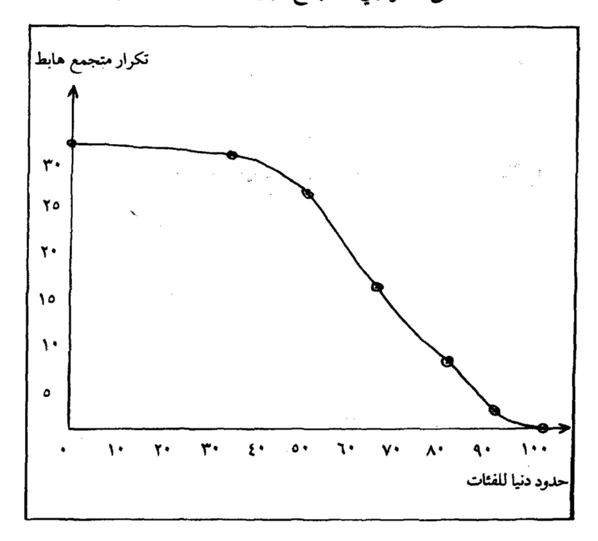
كمـا هـو الحـال في حـالـة المنحنى المتجمـع الصـاعـد يلزم تكـوين الجدول التكراري المتجمع الهابط أولاً لرسم هذا المنحنى .

فمثلاً لرسم المنحنى للتوزيع التكـراري المتجمع الهـابط لدرجـات ٣٠

طالباً بجدول (٢ ـ ١٥) نأخذ نفس مقياس الرسم بالشكل السابق ويأخذ المنحنى التكراري المتجمع الهابط الصورة التالية :

شكل (٣ ـ ١٦)

المنحنى التكراري المتجمع الهابط لدرجات ٣٠ طالباً



والجدير بالذكر أنه إذا رسمنا المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع الهابط في شكل واحد فإن المنحنيين سوف يتقاطعان في نقطة واحدة ، وإذا اسقطنا من نقطة التقاطع عموداً على المحور الأفقي فنحصل على الوسيط وهو أحد مقاييس النزعة المركزية . ويستطيع القارىء أن يجد أن الوسيط في هذا المثال يساوي ٦٥ .

تمارين الفصل الثالث

(١) الجدول التالي يوضح تقديرات الدخل الزراعي لإحدى الدول بملايين الجنيهات عن الأعوام ١٩٨٠ ــ ١٩٨٤ .

جملة الدخل / السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤
القطن	١٥٠	١٩٠	١٦٠	١٢٠	٩٠
موارد أخرى	٢٦٠	٢٨٠	٢٧٠	٢٧٠	٢٩٠
المجموع	٤١٠	٤٧٠	٤٣٠	٣٩٠	٣٨٠

والمطلوب : تمثيل هذه البيانات بشكل بياني مناسب .

(٢) من الجدول التكراري التالي :

فئات	٥ ــ	١٥ ــ	٢٥ ــ	٣٥ ــ	٤٥ ــ	٥٥ ــ	٦٥ ــ ٧٥
تكرار	١٢	١٩	٢٥	٤٥	٣٠	١٨	١١

والمطلوب :

أ ـ رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري .

ب ـ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والهابط .

(٣) المطلوب رسم المدرج والمنحنى التكراري للتوزيع التالي :

الفئات	١٨ ــ	٢٠ ــ	٢٥ ــ	٣٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠فأكثر
التكرار	٨	٧٥	٨٥	٧٠	٣٠	١٠

(٤) الجدول التالي يبين توزيع ١٠٠ شركة حسب حجم مبيعاتها السنوية :

جملة المبيعات بالألف جنيه	١٠ ــ	٢٠ ــ	٢٥ ــ	٣٠ ــ	٣٥ ــ	٤٠ــ٤٥
عــدد الشركـات	٨	١٢	٢٠	٢٥	١٩	١٦

والمطــلوب :

أ - ارسم منحنى التكرار الصاعد والهابط .

ب - حـدد من الرسم عـدد الشـركـات التي يبلغ رقم مبيعـاتهـا أكثـر من ٢٢ ألف جنيه .

جـ- أوجد نسبة الشركات التي تقل مبيعاتها عن ٣٥ ألف جنيه .

(٥) فيمـا يلي عدد السكـان التقديـري في مصر في أول يـوليو من كـل سنـة خلال ١٩٦٥ ــ ١٩٧٠ .

السنــة	١٩٦٥	١٩٦٦	١٩٦٧	١٩٦٨	١٩٦٩	١٩٧٠
عدد السكان بالمليون	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤

والمطلوب عرض هذه البيانات بيانياً .

(٦) الجدول الآتي يعطي التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى المؤسسات .

العمر بالسنوات	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–	٤٠–	٤٥–	٥٠–٥٥
عدد الموظفين	١٦	٢١	٣٧	٥١	٤٢	٢٤	٩

والمطلوب :

أ - أوجد جدول التكرار النسبي .

ب - أوجد جدول التكرار المتجمع النسبي الصاعد والهابط .

جـ - احسب نسبة عدد الموظفين الذين يقل اعمارهم عن ٣٧ سنة .

(٧) إذا كانت قيم الصادرات والواردات (بالمليون دولار) في دولة ما يلخصها الجدول التالي :

	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
الصادرات	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٤٨٥٠	٥٥٠٠	٤١٠٠
الواردات	١٢٠٠	١١٠٠	١١٥٠	١٥٠٠	١٦٥٠

والمطلوب :

أ - تمثيل هذه البيانات بإستخدام طريقة المستطيلات .

ب - تمثيل هذه البيانات بإستخدام طريقة الخط البياني .

الفصل الرابع
مقاييس النزعة المركزية
Measures of Central Tendency

مقدمة :

يبدأ البحث بجمع المعلومات والبيانات عن الظاهرة موضوع البحث ثم تلخيص وتبويب هذه البيانات في صورة توزيعات تكرارية مختلفة ثم تمثيلها بيانياً . وقد تكون هذه المرحلة كافية للحصول على المعلومات حول الظاهرة المدروسة غير أننا وفي أكثر المناسبات نحتاج إلى تلخيص المعلومات الواردة في الجداول التكرارية بصورة أكبر وذلك بغرض استخدامها في مقارنة معلومات واردة في جدولين تكراريين أو أكثر والحكم على اختلافها أو تقاربها وهنا تأتي المرحلة التالية من خطوات البحث الاحصائي والتي تلخص التوزيع التكراري بقيمة واحدة .

وللقيام بهذا نبحث عن قيمة متوسطة تعبّر عن هذا التوزيع وتسمى المتوسط Average وهي القيمة التي تتجمع حولها قيم الظاهرة ومن هنا يسمى هذا الميل إلى التجمع حول المتوسط بالنزعة المركزية ويفضل أن يتوافر في المتوسط الشروط التالية :

(١) ألاّ يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

(٢) يسهل حسابه ومعالجته جبرياً .

(٣) أن يأخذ في الاعتبار جميع المفردات التي تتكون منها الظاهرة .

(٤) يمكن حسابه بسرعة وسهولة .

(٥) أن يكون له معنى وخواص مميزة .

وتوجد عدة مقاييس للنزعة المركزية أهمّها :

(١) الوسط الحسابي Arithmetic Mean

(٢) الوسيط Median

(٣) المنوال Mode

(٤) الوسط الهندسي Geometric Mean

(٥) الوسط التوافقي Harmonic Mean

وسوف نتناول هذه المقاييس سواء للتوزيعات المبوبة أو غير المبوبة .

أولاً : الوسط الحسابي Arithmetic Mean

هو أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها شيوعاً واستخداماً في كثير من المجالات الاحصائية ويستخدم العامة لفظ المتوسط على أنه الوسط الحسابي كما أنه أقرب المقاييس تحقيقاً للشروط السابقة .

أ ـ الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

(١) الطريقة المباشرة :

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها أي أن :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

فإذا كان لدينا (ن) من القيم هي $س_١$ ، $س_٢$ . . . . ، $س_ن$

فإن الوسط الحسابي (وسنرمز له بالرمز $\bar{س}$) هو

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \dots + س_ن}{ن}$$

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\text{مجـ}\ س}{ن}} \qquad (٤ - ١)$$

مثال (٤ ــ ١) :

احسب الوسط الحسابي للقيم التالية :

١٠ ، ١١ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢

الحــل :

$$\bar{س} = \frac{١٠+١١+٨+٩+١٠+١٢}{٦} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$$

مثال (٤ ــ ٢) :

احسب الوسط الحسابي للقيم :

٦٤٥ ، ٦٥٥ ، ٦٦٥ ، ٦٧٥ ، ٦٨٥

الحــل :

$$\bar{س} = \frac{٦٤٥ + ٦٥٥ + ٦٦٥ + ٦٧٥ + ٦٨٥}{٥} = \frac{٣٣٢٥}{٥} = ٦٦٥$$

(٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

الهدف من هذه الطريقة والطريقة التالية هو تسهيل واختصار العمليات الحسابية وتقوم هذه الطريقة على خاصية أساسية من خصائص الوسط الحسابي وهي أن طرح (أو جمع) مقدار ثابت من قيم المتغير يؤدي إلى نقص (أو زيادة) الوسط الحسابي الناتج بقيمة هذا الثابت ، وتتلخص خطوات هذه الطريقة على النحو التالي :ـــ

١ ــ نختار وسط فرضي مناسب وسنرمز له بالرمز (أ) وليس هناك قواعد محددة تحكم اختيار هذا الوسط ولكن يمكن اختياره على أساس قربه من متوسط مجموعة القيم أو على أساس أكثر القيم تكراراً .

٢ ـ بطرح هذا الوسط من جميع القيم فنحصل على الانحرافات أو الفروق البسيطة وسنرمز لها بالرمز (ح = س ـ أ) ونحصل على مجموع هذه الانحرافات .

٣ ـ نطبق العلاقة التالية في حساب الوسط الحسابي .

$$\overline{س} = \frac{مجـ ح}{ن} + أ \qquad (٤ ـ ٢)$$

حيث (ح) ترمز إلى الانحرافات البسيطة .

(أ) ترمز إلى الوسط الفرضي .

مثال (٤ ـ ٣) :

احسب الوسط الحسابي لمثال (٤ ـ ٢).

الحـل :

باختيار وسط فرضي وليكن أ = ٦٤٥

قيم س	٦٤٥	٦٥٥	٦٦٥	٦٧٥	٦٨٥
ح = س - أ	صفر	١٠	٢٠	٣٠	٤٠

$$\therefore \overline{س} = \frac{مجـ ح}{ن} + أ$$

$$= \frac{١٠٠}{٥} + ٦٤٥ = ٢٠ + ٦٤٥$$

= ٦٦٥ وهي نفس النتيجة السابقة

حل آخر : باختيار القيمة المتوسطة كوسط فرضي (أ = ٦٦٥)

س	٦٤٥	٦٥٥	٦٦٥	٦٧٥	٦٨٥
ح	ـ٢٠	ـ١٠	صفر	١٠	٢٠

$$\therefore \bar{س} = \frac{مجـ ح}{ن} + أ$$

$$= \frac{صفر}{٥} + ٦٦٥$$

$= ٦٦٥$ وهي نفس النتيجة السابقة

ويلاحظ أننا حصلنا على نفس النتيجة في جميع الحالات ويستطيع القارىء أن يتحقق بنفسه إذا اختار وسطاً آخر أي أن قيمة الوسط الحسابي تظل ثابتة ولا تختلف باختلاف الوسط الفرضي المستخدم .

(٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

يمكن استخدام هذه الطريقة لتسهيل أكثر في العمليات الحسابية إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على مقدار ثابت وليكن (ث) وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي :

- نضع قيم المفردات في العمود الأول .
- نحسب الانحرافات البسيطة ونضعها في العمود الثاني .
- نختار العامل المشترك (ث) الذي تقبل القسمة عليه جميع الانحرافات البسيطة فنحصل على الانحرافات المختصرة أو المختزلة وسنرمز لها بالرمز ($ح'$) في عمود ثالث .

ـ ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

$$\bar{س} = \left(\frac{مجـ ح^{/}}{ن} \times ث\right) + أ \qquad (٤ ـ ٣)$$

حيث ح/ الانحرافات المختزلة أو المختصرة ($\frac{ح}{ث}$)

أ الوسط الفرضي

ث العامل المشترك

ن عدد القيم

مثال (٤ ـ ٤) :

احسب الوسط الحسابي لمثال (٤ ـ ٢) .

الحل :

كما فعلنا في حل مثال (٤ ـ ٣) وباختيار أ = ٦٤٥ ، ث = ١٠

س	ح	$ح^{/} = \frac{ح}{١٠}$
٦٤٥	صفر	صفر
٦٥٥	١٠	١
٦٦٥	٢٠	٢
٦٧٥	٣٠	٣
٦٨٥	٤٠	٤
	١٠٠	١٠

$$\bar{س} = \left(\frac{\text{مجـ ح}'}{\text{ن}} \times \text{ث}\right) + \text{أ}$$

$$= \left(\frac{١٠}{٥} \times ١٠\right) + ٦٤٥$$

$$= ٢٠ + ٦٤٥ = ٦٦٥$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل .

والجدير بالذكر أننا أردنا من اختيارنا للمقدار (٦٦٥) كوسط فرضي في الحل الآخر لمثال (٤ ــ ٣) أن نثبت إحدى الخصائص الأساسية للوسط الحسابي وهي مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً أي أن :

مجـ (س ــ $\bar{س}$) = صفر دائماً

ويمكن اثباتها جبرياً بسهولة على النحو التالي : ــ

الطرف الأيمن = مجـ (س ــ $\bar{س}$)

= مجـ س ــ ن $\bar{س}$ ، ($\bar{س}$ مقدار ثابت)

= ن $\bar{س}$ ــ ن $\bar{س}$ ، (لأن $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$)

= صفر ويساوي الطرف الأيسر

ب ــ الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

هناك ثلاث طرق لحساب الوسط الحسابي من الجداول التكرارية كما هو الحال بالنسبة للبيانات غير المبوبة وعلى القارىء أن يختار الطريقة المناسبة على ضوء البيانات المتاحة .

(١) الطريقة المباشرة :

وتتلخص خطواتها على النحو التالي :

- نضع الفئات والتكرار في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات ونرمز له بالرمز (س) ونضعه في عمود ثالث [مركز الفئة = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) ÷ ٢] .
- نضرب مركز كل فئة في التكرار المناظر ونحصل على مجموع حواصل الضرب (مجـ س ك) في عمود رابع .
- ثم تطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} \qquad (٤ - ٤)$$

مثال (٤ ـ ٥) :

احسب الوسط الحسابي من الجدول التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات .

العمر بالسنوات	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	٣٥ـ	٤٠ـ	٤٥ـ	٥٠ـ٥٥
عدد الموظفين	١٦	٢١	٣٧	٥١	٤٢	٢٤	٩

الحــل :

جــدول (٤ ــ ١)

حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

فـئــات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك
٢٠ ــ	١٦	٢٢,٥	٣٦٠
٢٥ ــ	٢١	٢٧,٥	٥٧٧,٥
٣٠ ــ	٣٧	٣٢,٥	١٢٠٢,٥
٣٥ ــ	٥١	٣٧,٥	١٩١٢,٥
٤٠ ــ	٤٢	٤٢,٥	١٧٨٥
٤٥ ــ	٢٤	٤٧,٥	١١٤٠
٥٠ ــ ٥٥	٩	٥٢,٥	٤٧٢,٥
المجمـوع	٢٠٠		٧٤٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٧٤٥٠}{٢٠٠} = ٣٧,٢٥$$

ويلاحظ صعوبـة عملية الضـرب يدويـاً في هذه الـطريقة ولتبسيط ذلـك نتبع إحدى الطريقتين التاليتين :

(٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

تقوم هذه الطريقة على اختيار وسط فرضي مناسب من بين قيم مراكز الفئات وكما أوضحنا من قبل أن قيمة الوسط الحسابي لا تختلف باختلاف الوسط الفرضي ، وفي حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة أو القريبة من التماثل يفضل اختيار مركز الفئة المواجهة لأكبر تكرار كوسط فرضي حتى يكون مجموع الانحرافات أقل ما يمكن لتسهيل الحل وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي :

- نضع الفئات والتكرار في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات (س) في عمود ثالث كما سبق .
- نحدد الوسط الفرضي (أ) ثم نحسب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضي (ح = س ــ أ) في عمود رابع .
- نضرب كل انحراف في تكرار الفئة المقابلة له ثم نحصل على مجموع حواصل الضرب (مجـ ح ك) في عمود خامس ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي .

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} + أ \qquad (٤ - ٥)$$

مثال (٤ ــ ٦) :

احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات البسيطة لمثال (٤ ــ ٥) .

الحـل :

جدول (٤ ـ ٢)

حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات البسيطة

فئات العمر	عدد الموظفين ك	مركز الفئات س	انحرافات بسيطة ح = س ـ أ	ح ك
٢٠ ـ	١٦	٢٢,٥	ـ ١٥	ـ ٢٤٠
٢٥ ـ	٢١	٢٧,٥	ـ ١٠	ـ ٢١٠
٣٠ ـ	٣٧	٣٢,٥	ـ ٥	ـ ١٨٥
٣٥ ـ	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر
٤٠ ـ	٤٢	٤٢,٥	٥	٢١٠
٥٠ ـ ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥	١٣٥
المجموع	٢٠٠			ـ ٥٠

الوسط الفرضي = أ = ٣٧,٥

$$\overline{س} = \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك} + أ$$

$$= \frac{-٥٠}{٢٠٠} + ٣٧,٥$$

$$= -,٢٥ + ٣٧,٥ = ٣٧,٢٥$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقة المباشرة .

(٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على عامل مشترك يمكن استخدام طريقة الانحرافات المختصرة ويحدث ذلك دائماً في حالة التوزيعات المنتظمة حيث أطوال الفئات متساوية ويكون العامل المشترك مساوياً لطول الفئة . وتتلخص خطوات هذه الطريقة كما يلي :

- نضع الفئات والتكرارات في العمودين الأول والثاني .
- نحسب مراكز الفئات كما سبق في عمود ثالث .
- نحسب الانحرافات البسيطة في عمود رابع .
- بعد اختيار المقدار الثابت أو العامل المشترك (ث) نقسم جميع الانحرافات البسيطة على هذا المقدار فنحصل على الانحرافات المختصرة في عمود خامس .
- نقوم بضرب الانحرافات المختصرة في التكرارات المناظرة ونحصل على مجموع حواصل الضرب (مجـ ح/ ك) ثم نطبق العلاقة التالية لحساب الوسط الحسابي :

$$\overline{س} = \left(\frac{مجـ ح/ ك}{مجـ ك} \times ث \right) + أ \qquad (٤ - ٦)$$

مثال (٤ ـ ٧) :

احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة لمثال (٤ ـ ٥) .

الحــل :

جــدول (٤ ــ ٣)

حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة

فئـات	تكرار ك	مراكز الفئات س	انحرافات بسيطة ح = س ــ أ	انحرافات مختصرة $ح' = \frac{ح}{٥}$	ح' ك
٢٠ ــ	١٦	٢٢,٥	ــ ١٥	ــ ٣	ــ ٤٨
٢٥	٢١	٢٧,٥	ــ ١٠	ــ ٢	ــ ٤٢
٣٠ ــ	٣٧	٣٢,٥	ــ ٥	ــ ١	ــ ٣٧
٣٥	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر
٤٠	٤٢	٤٢,٥	٥	١	٤٢
٤٥ ــ	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢	١٨
٥٠ ــ ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥	٣	٢٧
المجموع	٢٠٠				ــ ١٠

أ = ٣٧,٥ ، ث = ٥

$$\bar{س} = (\frac{مجـ ح' ك}{مجـ ك} \times ث) + أ$$

$$= (\frac{-١٠}{٢٠٠} \times ٥) + ٣٧,٥$$

= ــ ٢٥ر + ٣٧,٥

= ٣٧ر٢٥

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقتين السابقتين .

الوسط الحسابي في حالة التوزيعات غير المنتظمة :

نطبق نفس القواعد السابقة ويلاحظ أننا لا نجري تعديلاً للتكرارات بل نحسب مراكز الفئات ونتبع نفس خطوات الحل كما في حالة التوزيعات المنتظمة إلاَّ أنه قد يصعب تطبيق طريقة الانحرافات المختصرة نظراً لاختلاف أطوال الفئات .

مثال (٤ ـ ٨) :

احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري :

فئات	١٠ ـ	١٢ ـ	١٤ ـ	١٨ ـ	٢٠ ـ ٢٤
تكرار	٤٠	٥٠	٦٠	٣٠	٢٠

الحل :

جدول (٤ ـ ٤)

حساب الوسط الحسابي للتوزيع غير المنتظم بالطريقة المباشرة

فئات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك
١٠ ـ	٤٠	١١	٤٤٠
١٢ ـ	٥٠	١٣	٦٥٠
١٤ ـ	٦٠	١٦	٩٦٠
١٨ ـ	٣٠	١٩	٥٧٠
٢٠ ـ ٢٤	٢٠	٢٢	٤٤٠
المجموع	٢٠٠		٣٠٦٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك}$$

$$= \frac{٣٠٦٠}{٢٠٠} = ١٥,٣$$

حـل آخـر :

جـدول (٤ ـ ٥)

حساب الوسط الحسابي للتوزيع

غير المنتظم بطريقة الانحرافات البسيطة

فئـات	تكرار ك	مراكز الفئات س	انحرافات بسيطة ح = س ـ ١٦	ح ك
١٠ ـ	٤٠	١١	ـ ٥	ـ ٢٠٠
١٢ ـ	٥٠	١٣	ـ ٣	ـ ١٥٠
١٤ ـ	٦٠	١٦	صفر	صفر
١٨ ـ	٣٠	١٩	٣	٩٠
٢٠ ـ ٢٤	٢٠	٢٢	٦	١٢٠
المجموع	٢٠٠			ـ ١٤٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك} + أ$$

$$= \frac{-١٤٠}{٢٠٠} + ١٦$$

$$= -٧ر + ١٦ = ١٥ر٣$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

ملاحظات :

١ ـ لاحظنا من العرض السابق أن مجموع انحرافات (فروق) القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً ، باستخدام هذه الخاصية يمكن تعريف الوسط الحسابي بأنه المقياس الاحصائي الذي إذا حسبنا انحرافات القيم عنه كان مجموع هذه الانحرافات يساوي صفر .

٢ ـ مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي مقدار آخر .

٣ ـ لا يمكن حساب الوسط الحسابي باستخدام الرسم البياني على عكس الوسيط والمنوال كما سنرى فيما بعد .

٤ ـ لا يمكن حساب الوسط الحسابي من الجداول التكرارية المفتوحة نظراً لصعوبة تحديد مراكز الفئات المناظرة لها .

٥ ـ يلاحظ عند حساب الوسط الحسابي أنه يأخذ في اعتباره جميع قيم المجموعة ومن ثم يتأثر بأي قيمة شاذة أو متطرفة بين مفردات المجموعة .

ثانياً : الـوســيط Median

الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بعـد ترتيبهـا تصاعـدياً أو تنـازليـاً أو هـو القيمـة التي عـدد المفـردات التي أقـل منهـا يســاوي عـدد المفردات التي أكبر منها .

وتختلف طرق حساب قيمة الوسيط باختلاف طبيعة البيانات .

أ ــ حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة :

١ ــ إذا كان عدد القيم (ن) فردي فإن الوسيط هو قيمة المفردة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$

مثال (٤ ــ ٩) :

احسب الوسيط للقيم التالية :

١٩ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤ ، ١٥

الحــل :

نرتب القيم تصاعدياً على النحو التالي :

١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٩

وحيث أن عدد القيم (٥) فإن ترتيب الوسيط = $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣

يتضح أن القيمة التي ترتيبها التصاعدي أو التنازلي ٣ هي ١٥

∴ الوسيط = ١٥

٢ ـ إذا كان عدد القيم (ن) زوجياً فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للمفردتين التي ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١

مثال (٤ ـ ١٠) :

احسب الوسيط للقيم التالية : ـ

٢١٩ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٧

الحـل :

نرتب القيم تصاعدياً على النحو التالي :

١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢١٩

الوسيط هو متوسط القيمتين التي ترتيبهما الثالث والرابع

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{١٥ + ١٦}{٢} = ١٥,٥$$

ويلاحظ أن قيمة الوسيط لم تتأثر بالقيمة الشاذة أو المتطرفة الموجودة بالمجموعة على عكس الوسط الحسابي .

ب ـ حساب الوسيط من البيانات المبوبة :

لحساب الوسيط من التوزيعات التكرارية سواء كانت منتظمة أو غير منتظمة هناك طريقتان احداهما بالحساب والأخرى بالرسم .

١ ـ طريقة الحساب :

وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية :

ـ تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط.

ـ نحسب ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$

- نحدد الفئة الوسيطية التي يقع فيها الوسيط ثم نحدد قيمة الوسيط كما يتضح في المثال التالي .

مثال (٤ ــ ١١) :

احسب الوسيط للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال (٤ ــ ٥) .

الحــل :

١ ــ تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٢٠	صفر
أقل من ٢٥	١٦
أقل من ٣٠	٣٧
أقل من ٣٥	٧٤
أقل من ٤٠	١٢٥
أقل من ٤٥	١٦٧
أقل من ٥٠	١٩١
أقل من ٥٥	٢٠٠

٢ ــ نحدد ترتيب الوسيط باستخدام العلاقة :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

٣ ـ يلاحظ من استعراض التكرار المتجمع الصاعد أن الفئة الوسيطية هي ٣٥ ـ ٤٠ لأن ترتيب الوسيط يقع بين ٧٤ ، ١٢٥ كما أن موقع الوسيط بين ٣٥ ، ٤٠ كموقع ١٠٠ بين ٧٤ ، ١٢٥ وهذا يعني أن الوسيط ($ر_٢$) يقسم المسافة بين ٣٥ ، ٤٠ بنفس النسبة التي تقسم بها ١٠٠ المسافة بين ٧٤ ، ١٢٥ ويمكن التعبير عن هذه النسبة على النحو التالي :

٣٥	٧٤
$ر_٢$	١٠٠
٤٠	١٢٥

$$\frac{ر_٢ - ٣٥}{٤٠ - ٣٥} = \frac{١٠٠ - ٧٤}{١٢٥ - ٧٤}$$

$$\frac{ر_٢ - ٣٥}{٥} = \frac{٢٦}{٥١}$$ بضرب الطرفين في ٥

$$ر_٢ = ٣٥ + \frac{١٣٠}{٥١} = ٣٥ + ٢,٥٥$$

∴ الوسيط = ٣٧,٥٥

ينتج من الحل السابق أنه يمكننا حساب الوسيط مباشرة باستخدام العلاقة التالية : ـ

$$ر_٢ = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \left(\frac{\text{ترتيب الوسيط} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \times \text{طول الفئة الوسيطية}\right)$$

حيث : $ك_1$ = التكرار المتجمع عند بداية الفئة الوسيطية .

$ك_2$ = التكرار المتجمع عند نهاية الفئة الوسيطية .

٢ ـ طريقة الرسم :

سبق الإشارة إلى أنه يمكن استخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد في حساب قيمة الوسيط وكل من الربيع الأعلى والأدنى وتتلخص خطوات ذلك فيما يلي :

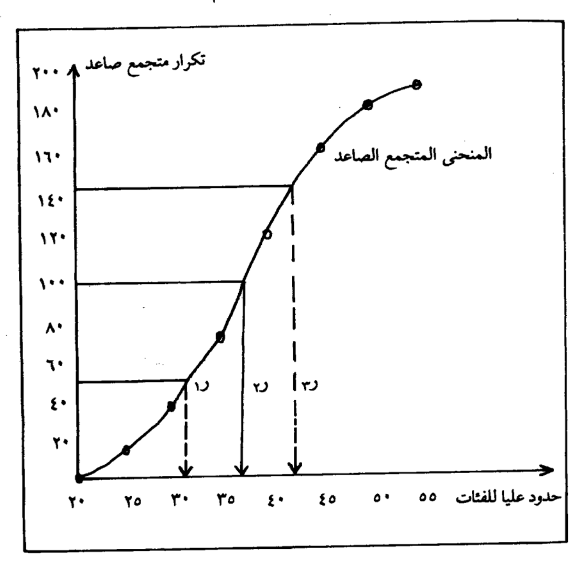
- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد ثم رسم المنحنى المتجمع الصاعد .
- تحديد ترتيب الوسيط وتحديد موضعه على المحور الرأسي الذي يمثل التكرار المتجمع الصاعد .
- نأخذ خط مستقيم من هذا الموقع يوازي المحور الأفقي الذي يمثل الحدود العليا للفئات فيقطع المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة إذا أسقطنا منها عموداً على المحور الأفقي نحصل على قيمة الوسيط .

مثال (٤ ـ ١٢) :

أوجد الوسيط بالرسم للمثال السابق : ـ

شكل (٤ ـ ١)

حساب الوسيط بالرسم



يلاحظ من شكل (٤ ـ ١) أن الوسيط = ٣٧,٥ تقريباً . كما يجدر الاشارة إلى أن الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة ويمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة على عكس الوسط الحسابي . ويستخدم الرسم أيضاً في تقدير قيمتي الربيع الأول (ر١) والربيع الثالث (ر٣) كما سيتضح فيما بعد في الفصل الخامس .

ثالثاً : المنوال Mode

المنوال هو أكثر القيم تكراراً أو شيوعاً بين مفردات مجموعة من القيم .

أ ـ حساب المنوال من البيانات غير المبوبة :

باستخدام التعريف السابق نبحث عن أكثر القيم تكراراً أو ظهوراً .

مثال (٤ ـ ١٣) :

أوجد المنوال للمجموعات التالية من القيم :

(أ) ٦ ، ٣ ، ٥ ، ١ ، ٧ ، ٢ ، ٤

(ب) ٦ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٥١

(جـ) ٩ ، ٢ ، ٩ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩

الحـل :

نجد أنه لا يوجد منوال للمجموعة الأولى وهناك قيمتان للمنوال للمجموعة الثانية هما ٦ ، ٥ بينما يوجد قيمة واحدة للمنوال في المجموعة الثالثة وهي ٩ . وفي الحالتين الأوليين لا يمكن اعتبار المنوال مقياساً للنزعة المركزية . ويتضح من المجموعة (ب) أن المنوال أقل مقاييس النزعة المركزية تأثراً بالقيم الشاذة .

ب ـ حساب المنوال من البيانات المبوبة :

هناك طريقتان لحساب المنوال بالرسم أو بالحساب سواء كانت التوزيعات التكرارية منتظمة أو غير منتظمة إلاَّ أنه يلزم حساب التكرارات المعدلة أولاً في حالة التوزيعات غير المنتظمة .

(١) طريقة الحساب :

وهناك طرق عديدة لإيجاد المنوال بالحساب أهمها طريقة الفروق « بيرسون » وطريقة الرافعة وسوف نركز في حسابنا على طريقة الرافعة .

ومضمون هذه الطريقة ما يلي :

نمثل الفئة المنوالية (التي تواجه أكبر تكرار) برافعة تعمل عند طرفيها قوتان احداهما التكرار السابق للفئة المنوالية ويعمل عند بدايتها والثانية التكرار اللاحق للفئة المنوالية ويعمل عند نهايتها ، ثم نفترض أن المنوال يقع على بعد (س) من بداية الفئة المنوالية .

∴ البعد الآخر = طول الفئة − س

ثم نستخدم العلاقة :

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد (س) ويمكن بعد ذلك الحصول على المنوال بالعلاقة :

المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

مثال (٤ ــ ١٤) :

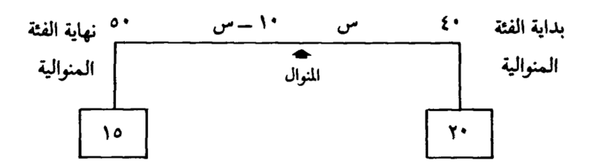
احسب المنوال من التوزيع التكراري التالي :

فئات	١٠ــ	٢٠ــ	٣٠ــ	٤٠ــ	٥٠ــ	٦٠ــ	٧٠ــ٨٠
تكرار	٨	١٢	٢٠	٢٥	١٥	١٣	٧

الحـــل :

١ ــ يلاحظ أن التوزيع شبه منتـظم وأن أكبر تكـرار هو ٢٥ وعليـه فإن الفئـة المنوالية هي ٤٠ ــ ٥٠

٢ ــ بتطبيق طريقة الرافعة :



القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

٢٠ × س = ١٥ × (١٠ - س)

٢٠ س = ١٥٠ ــ ١٥ س

٣٥ س = ١٥٠

س = $\frac{١٥٠}{٣٥}$ = ٤,٣

∴ المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ٤٠ + ٤,٣ = ٤٤,٣

ملاحظة :

يمكن اختصار طريقة الرافعة لحساب المنوال مباشرة باستخدام العلاقة :

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \left(\frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times \text{طول الفئة المنوالية}\right)$$

حيث : $ك_١$ = التكرار السابق لأكبر تكرار

$ك_٢$ = التكرار اللاحق لأكبر تكرار.

وباستخدام المثال السابق يمكن تقدير قيمة المنوال باستخدام هذه العلاقة على النحو التالي :

$$\text{المنوال} = ٤٠ + \left(\frac{١٥}{٢٠ + ١٥}\right) \times ١٠$$

$$= ٤٠ + \frac{١٥٠}{٣٥} = ٤٠ + ٤,٣ = ٤٤,٣$$

٢ ـ طريقة الرسم :

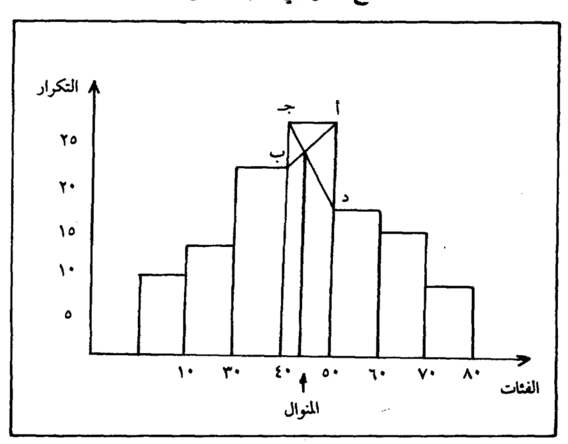
سبق الإشارة إلى أنه يمكن استخدام المدرج التكراري في ايجاد المنوال بالرسم وفي الواقع فإنه يمكننا الاكتفاء برسم ثلاث فئات فقط وهي الفئة المنوالية والسابقة عليها واللاحقة لها لتحديد قيمة المنوال بالرسم ويلزم تعديل التكرارات أولاً في حالة التوزيعات التكرارية غير المنتظمة .

مثال (٤ ـ ١٥) :

ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال للتوزيع التكراري في مثال (٤ ـ ١٤) .

شـكل (٤ ـ ٢)

المدرج التكراري وايجاد المنوال



ويتضح في شكل (٤ ـ ٢) أنه يمكن تحديد المنوال بعد رسم المدرج التكراري بتوصيل المستقيم (أ ب ، جـ د) فيتقاطعان في نقطة نسقط منها عموداً على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المنوال ، ومن الرسم المنوال = ٤٤ تقريباً .

مثال (٤ ـ ١٦) :

احسب المنوال للتوزيع التكراري في مثال (٤ ـ ٨) .

الحل :

يتضح أن هذا التوزيع غير منتظم ويلزم تعديل التكرار أولاً قبل البحث عن الفئة المنوالية .

فئـات	تكـرار	طول الفئة	تكرار معدل
١٠ ـ	٤٠	٢	٢٠
١٢ ـ	٥٠	٢	٢٥
١٤ ـ	٦٠	٤	١٥
١٨ ـ	٣٠	٢	١٥
٢٠ ـ ٢٤	٢٠	٤	٥

الفئة المنوالية (التي تواجه أكبر تكرار معدل) هي ١٢ ـ ١٤ وبتطبيق طريقة الرافعة :

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

٢٠ س = ١٥ (٢ ـ س)

٢٠ س = ٣٠ ـ ١٥ س

٣٥ س = ٣٠

١٢ ــ(س)ــ ▲ ــ(٢ ـ س)ــ ١٤

المنوال

٢٠   ١٥

س = $\frac{٣٠}{٣٥}$ = ,٨٦

∴ المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ١٢ + ,٨٦ = ١٢,٨٦

رابعاً : الوسط الهندسي Geometric Mean

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها (ن) هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم . والوسط الهندسي أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً في بعض التطبيقات الاحصائية الهامة مثل الأرقام القياسية ومعدلات النمو السكاني .

أ ــ حساب الوسط الهندسي من البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا عدد (ن) من قيم متغير ما هي :

$س_١$ ، $س_٢$ ، . . . . . ، $س_ن$ فإن الوسط الهندسي وسنرمز له بالرمز (د) هو :

$$د = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times \ldots \times س_ن} \qquad (٤ ــ ٧)$$

ويمكن الوصول إلى الحل باستخدام جداول اللوغاريتمات أو الآلات الحاسبة .

مثال (٤ ــ ١٧) :

أوجد الوسط الهندسي للأعداد ٦ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ١٠ .

الحل : $د = \sqrt[٥]{٦ \times ٥ \times ٣ \times ٧ \times ١٠}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{لو د} = \frac{1}{5} (\text{لو } 6 + \text{لو } 5 + \text{لو } 3 + \text{لو } 7 + \text{لو } 10)$$

$$= \frac{1}{5} (,7782 + ,6990 + ,4771 + ,845 + 1)$$

$$= \frac{1}{5} (3,7994) = ,7599$$

حيث لو ترمز إلى اللوغاريتم للاساس ١٠ .

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

د = ٥,٧٥٣

يلاحظ أيضاً أن $\overline{س}$ لهذه المجموعة هو ٦,٢ أي أن :

الوسط الحسابي > الوسط الهندسي .

ب ـ حساب الوسط الهندسي من البيانات المبوبة :

لحساب الوسط الهندسي من الجداول التكرارية نبدأ بإيجاد مراكز الفئات (س) ونستخدم العلاقة التالية :

$$\text{د} = \sqrt[\text{مجـ ك}]{\text{س}_1^{\text{ك}_1} \times \text{س}_2^{\text{ك}_2} \times \ldots \times \text{س}_\text{ن}^{\text{ك}_\text{ن}}} \qquad (٤ - ٨)$$

حيث (ك) ترمز إلى التكرارات ، (س) ترمز إلى مركز الفئة .

وباستخدام اللوغاريتمات .

$$\therefore \text{لو د} = \frac{\text{مجـ (ك لو س)}}{\text{مجـ ك}}$$

مثال (٤ ــ ١٨) :

احسب الوسط الهندسي للتوزيع التكراري في مثال (٤ ـ ١٤)

الحــل :

جــدول (٤ ــ ٦)

حساب الوسط الهندسي

فئــات	ك	س	لو س	ك لو س
١٠ ــ	٨	١٥	١,١٧٦١	٩,٤٠٨٨
٢٠ ــ	١٢	٢٥	١,٣٩٧٩	١٦,٧٧٤٨
٣٠ ــ	٢٠	٣٥	١,٥٤٤١	٣٠,٨٨٢٠
٤٠ ــ	٢٥	٤٥	١,٦٥٣٢	٤١,٣٠٠
٥٠ ــ	١٥	٥٥	١,٧٤٠٤	٢٦,١٠٦٠
٦٠ ــ	١٣	٦٥	١,٨١٢٩	٢٣,٥٦٧٧
٧٠ ــ ٨٠	٧	٧٥	١,٨٧٥١	١٣,١٢٥٤
	١٠٠			١٦١,١٩٤٧

$$\text{لو د} = \frac{\text{مجـ (ك لو س)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٦١,١٩٤٧}{١٠٠}$$

= ١,٦١١٩ ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات

∴ د = ٤٠,٩٢

يلاحظ أنه لا يمكن استخدام الوسط الهندسي كمقياس للنزعة المركزية إذا كانت إحدى القيم صفراً أو سالبة كما يرى البعض صعوبة حسابه نظراً لاعتماده على اللوغاريتمات إلَّا أنه أكثر المقاييس ملائمة في حساب الأرقام القياسية ومعدلات النمو كما أنه أكثر اعتدالاً من الوسط الحسابي لأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة نفس تأثر الوسط الحسابي بها

خامساً : الوسط التوافقي Harmonic Mean

الوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم ويفضل استخدام الوسط التوافقي في قياس الظواهر التي تقاس بالنسبة لوحدة ثابتة كوحدة الزمن مثل حساب معدل السرعة أو حساب معدل التغير في عدد الوحدات المنتجة يومياً بإحدى المصانع .

أ ـ حساب الوسط التوافقي من البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا عدد (ن) من القيم هي على الترتيب :

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_ن$$

فإنه باستخدام التعريف السابق يمكن حساب الوسط التوافقي وسنرمز له بالرمز (ت) بالعلاقة التالية :

$$ت = \frac{ن}{\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \ldots + \frac{١}{س_ن}}$$

$$ت = \frac{ن}{مجـ \left(\frac{١}{س} \right)} \qquad (٤ - ٩)$$

مثال (٤ ــ ١٩) :

احسب الوسط التوافقي للأعداد :

٢ ، ٨ ، ٤ ، ٥ ، ١٠

$$\text{ت} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)} = \frac{٥}{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{١٠}}$$

$$= \frac{٥}{,٥ + ,١٢٥ + ,٢٥ + ,٢ + ,١} = \frac{٥}{١,١٧٥} = ٤,٢٦$$

ويحساب الوسط الحسابي والوسط الهندسي لهذه المجموعة نجد أن :

$\overline{\text{س}}$ = ٥,٨ ، د = ٥,٠٢

ومن ثم نلاحظ أن

الوسط الحسابي > الوسط الهندسي > الوسط التوافقي .

ب ــ حساب الوسط التوافقي من البيانات المبوبة :

لحساب الوسط التوافقي من الجدول التكراري نستخدم العلاقة التالية :

$$\text{ت} = \frac{\text{مجـ ك}}{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}}{\text{س}}\right)} \qquad (٤ - ١٠)$$

حيث ك التكرارات

س مراكز الفئات

مثال (٤ ــ ٢٠) :

احسب الوسط التوافقي للتوزيع التكراري في مثال (٤ ــ ١٤) .

الحــل :

جــدول (٤ ــ ٧)

حساب الوسط التوافقي

فئـات	ك	س	$\frac{١}{س}$	$\frac{ك}{س}$
١٠ ــ	٨	١٥	,٠٦٦٧	,٥٣٣٣
٢٠ ــ	١٢	٢٥	,٠٤	,٤٨٠٠
٣٠ ــ	٢٠	٣٥	,٠٢٨٦	,٥٧١٤
٤٠ ــ	٢٥	٤٥	,٠٢٢٢	,٥٥٥٦
٥٠ ــ	١٥	٥٥	,٠١٨٢	,٢٧٢٧
٦٠ ــ	١٣	٦٥	,٠١٥٤	.٢٠٠٠
٧٠ ــ ٨٠	٧	٧٥	,٠١٣٣	,٠٩٣٣
المجمــوع	١٠٠			٢,٧٠٦٣

$$ت = \frac{مجـ ك}{مجـ (\frac{ك}{س})}$$

$$= \frac{١٠٠}{٢,٧٠٦٣} = ٣٦,٩٥$$

ملاحظات عامة

١ ـ العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال :

أ ـ إذا كان التوزيع متماثلاً Symmetric فإن
الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال .

والتوزيع التكراري التالي يعطي فكرة عن التوزيعات المتماثلة :.

فئات	٥ ـ	١٠ ـ	١٥ ـ	٢٠ ـ	٢٥ ـ	٣٠ ـ	٣٥ ـ ٤٠
تكرار	٢	٤	٦	١٠	٦	٤	٢

ويستطيع القارىء بسهولة أن يثبت أن :
الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال = ٢٢,٥

ب ـ إذا كان التوزيع غير متماثل أو ملتوي .
ـ إذا كان التوزيع ملتو ناحية اليمين فيلاحظ أن :
الوسط الحسابي > الوسيط > المنوال .
ـ إذا كان التوزيع ملتو ناحية اليسار فيلاحظ أن :
الوسط الحسابي < الوسيط < المنوال .

ويمكن استخدام هذه العلاقة في دراسة درجة التواء التوزيع فإذا كان :

(الوسط الحسابي ـ المنوال) = صفر يكون التوزيع متماثل.

أو (الوسط الحسابي ـ الوسيط) > صفر يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليمين .

< صفر يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليسار .

كذلك يمكن حساب أي من المقاييس الثلاثة بدلالة المقياسين الآخرين باستخدام العلاقة :

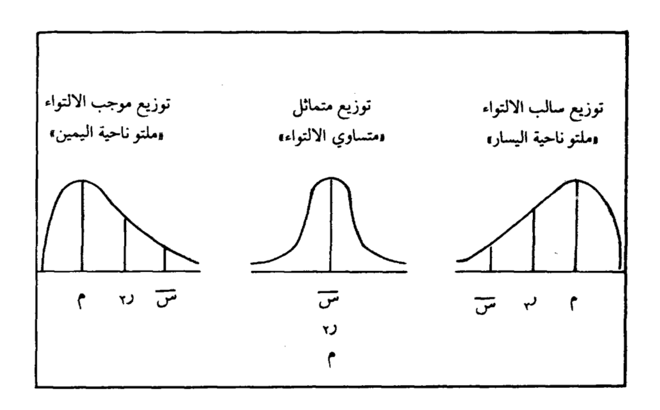
المنوال = ٣ × الوسيط - ٢ × الوسط الحسابي .

وهذه العلاقة تمكننا من حساب الوسط الحسابي وخاصة في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يصعب حسابه مباشرة بعد حساب كل من الوسيط والمنوال .

وشكل (٤ ـ ٣) يوضح العلاقة بين كل من الوسط الحسابي (س̄) والوسيط (ر٢) والمنوال (م) في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة والملتوية .

شـكل (٤ ـ ٣)

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال



٢ ـ العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي :

يستطيع القارىء أن يلاحظ بسهولة من خلال حلول الأمثلة السابقة صحة العلاقة التالية :

الوسط الحسابي > الوسط الهندسي > الوسط التوافقي

تمارين الفصل الرابع

(١) من الجدول التكراري التالي :

فئـات	١٤ ـ	١٦ ـ	١٨ ـ	٢٠ ـ	٢٢ ـ	٢٤ ـ ٢٦
تكرار	١٣	٢٥	٣٠	٤٠	٢٤	١٥

أ ـ ارسم المـدرج التكراري واشتق منـه المنوال وحقق النـاتـج بالحساب .

ب ـ ارسم منحنى التكرار المتجمع الصـاعد واشتق منـه الوسيط وحقق الناتج حسابياً .

جـ ـ احسب الوسط الحسابي .

(٢) احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري :

فئات	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	٣٥ـ٤٠
تكرار	٩	٢١	٣٢	٤٥	٢٥	١١	٤

(٣) التـوزيع التكـراري التالي يـوضح تـوزيع ٩٠٠ مشتغـل بحسب دخـولهم الشهرية :

فئات الدخل	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-١٠٥
عدد المشتغلين	٦٨	٨٩	١٢١	١٥٢	١٩٧	١٣٦	٨٠	٥٧

والمطلوب :

أ - حساب الوسط الحسابي .

ب - ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال.

جـ- احسب الوسط التوافقي والهندسي .

د - ارسم المنحنى التكراري والمضلع التكراري .

(٤) احسب الوسط الحسابي والهندسي والتوافقي للقيم التالية :

١١ ، ١٣ ، ٩ ، ١٧ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٥

(٥) احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من المجموعات التالية :

أ — ٢ ، ٣ ، ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ٨

ب — ٩ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٣ ، ٦

جـ — ٣٧ ، ٤٢ ، ٣٧ ، ٤٥ ، ٤٠

(٦) من الجدول التكراري التالي :

فئات	١٠—	١٥—	٢٥—	٣٥—	٤٠—	٤٥ — ٥٥
تكرار	١٢٥	٣٠٠	٤٥٠	١٠٠	٥٠	٢٠

والمطلوب :

أ — ارسم المدرج التكراري واشتق منه المنوال .

ب — احسب الوسط الحسابي .

(٧) من التوزيع التكراري :

فئـات	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٨٠ فأكثر
تكرار	٢٢	٣٧	٥٠	٦٢	٤٣	٣٥	١١

والمطـلوب :

أ ـ كون جدول التكرار المتجمع الصاعد واشتق منه الوسيط.

ب ـ احسب المنوال بطريقة الرافعة .

جـ ـ قدر قيمة الوسط الحسابي .

(٨) كـان الانفاق الشهـري بالـدينار لعينـة مكونـة من ٤٠٠ أسرة مـوزعاً كمـا يلي :

فئات الانفاق	٣٠ـ	٥٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٨٠ـ	١٠٠ فأكثر
عدد الاسر	٤٠	٣٠	٤٠	١٠٠	١٢٠	٧٠

والمطلوب تقدير قيمة الوسط الحسابي للانفاق .

الفصل الخامس

مقاييس التشتت والالتواء

Measures of Dispersion

مقدمة :

المتوسطات كمجموعة من مقاييس النزعة المركزية قد لا تعطى فكرة صحيحة عن طبيعة الظاهرة محل الدراسة وبصفة خاصة عن اجراء المقارنة بين مجموعتين من القيم فقد يتساوى متوسط المجموعتين في نفس الوقت الذي يوجد فيه اختلاف كبير بين مفردات كل منهما مما يعطي نتائج مضللة لو اكتفينا بالمتوسط فقط .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا مجموعتين من القيم :

المجموعة الأولى :	٨ ،	٩ ،	١١ ،	١٢
المجموعة الثانية :	١ ،	٧ ،	١٠ ،	٢٢

والوسط الحسابي في كل من المجموعتين يساوي ١٠ فلو اعتمدنا على الوسط وحده في تكوين فكرة عن كل من المجموعتين لتوصلنا إلى فكرة غير صحيحة وهي أن المجموعتين متشابهتين وهذا على عكس الواقع لأن قيم المجموعة الأولى متقاربة من بعضها البعض على عكس القيم في المجموعة الثانية لأن المدى في المجموعة الأولى يساوي ١٢ ـ ٨ =٤ بينما المدى في المجموعة الثانية يساوي ٢٢ ـ ١ = ٢١ أي أن القيم في المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من القيم في المجموعة الأولى .

وباختصار فإنه لتكوين فكرة صادقة عن مجموعة من القيم يلزم معرفة قيمة تشتتها بجانب معرفة متوسطها . والتشتت لفظ يعني التباعد أو التفاوت بين مفردات مجموعة من القيم وأهم مقاييس التشتت هي :

(١) المدى .
(٢) نصف المدى الربيعي .
(٣) الانحراف المتوسط .
(٤) الانحراف المعياري .

أولاً : المدى Range

المدى هو أبسط مقاييس التشتت وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة من بين مفردات مجموعة من القيم أي أن :

المدى = الحد الأعلى للقيم - الحد الأدنى للقيم

وبالرغم من سهولة حساب المدى إلاَّ أنه أقل مقاييس التشتت استخداماً نظراً لأنه يعتمد في حسابه على مشاهدتين فقط من مشاهدات العينة ويعطي نتائج مضللة عند وجود قيم شاذة أو متطرفة كذلك لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة مما يستلزم الرجوع للقيم الأصلية . ومن عيوب المدى أنه لا يصلح للمقارنة بين تشتت مجموعتين من القيم مختلفة في وحدات القياس .

ثانياً : نصف المدى الربيعي Semi - Interquartile Range

يستخدم نصف المدى الربيعي كمقياس للتشتت لعلاج النقص الناشيء عن تأثر المدى بالقيم المتطرفة فضلاً على أنه المقياس الوحيد لقياس التشتت في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

ونصف المدى الربيعي هو نصف الفرق بين الربيع الأعلى والربيع الأدنى .

∴ نصف المدى الربيعي = $\frac{١}{٢}$ (الربيع الأعلى ــ الربيع الأدنى) .

فإذا رمزنا للربيع الأعلى أو الثالث بالرمز ($ر_٣$) ورمزنا للربيع الأدنى أو الأول بالرمز ($ر_١$) فإن :

نصف المدى الربيعي =$\frac{١}{٢}$($ر_٣$ ـ $ر_١$)	(٥ ــ ١)

حيث أن :

الربيع الأدنى : هو القيمة التي يسبقها $\frac{١}{٤}$ التكرارات ويتلوها $\frac{٣}{٤}$ التكرارات .

أي أن : ترتيب $ر_١$ = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٤}$ = $\frac{\text{مجـ ك}}{٤}$

الربيع الأعلى : هو القيمة التي يسبقها $\frac{٣}{٤}$ التكرارات ويتلوها $\frac{١}{٤}$ التكرارات أي أن :

$$ترتيب\ ر_3 = \frac{3 \times مجموع\ التكرارات}{4} = \frac{3 \times مجـ ك}{4}$$

ويمكننا حساب نصف المدى الربيعي من التوزيعات التكرارية باستخدام طريقتي الرسم والحساب كما سبق في حساب الوسيط كما يتضح في حل المثال التالي :

مثال (٥ ـ ١) :

احسب نصف المدى الربيعي للجدول التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال (٤ ـ ٥) .

الحل : ١ ـ طريقة الحساب :

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد

حدود عليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
أقل من ٢٠	صفر
أقل من ٢٥	١٦
أقل من ٣٠	٣٧
أقل من ٣٥	٧٤
أقل من ٤٠	١٢٥
أقل من ٤٥	١٦٧
أقل من ٥٠	١٩١
أقل من ٥٥	٢٠٠

ـ لحساب قيمة الربيع الأدنى :

$$\text{ترتيب } ر_1 = \frac{٢٠٠}{٥} = ٥٠$$

ومن الجدول التكراري الصاعد نجد أن الفئة التي يقع فيها الربيع الأدنى هي ٣٠ ـ ٣٥ وباستخدام التناسب على النحو التالي :

٣٠	٣٧
$ر_1$	٥٠
٣٥	٧٤

$$\frac{ر_1 - ٣٠}{٣٥ - ٣٠} = \frac{٥٠ - ٣٧}{٧٤ - ٣٧}$$

$$\frac{ر_1 - ٣٠}{٥} = \frac{١٣}{٣٧}$$

$$\therefore ر_1 = ٣٠ + \frac{٦٥}{٣٧}$$

$$\therefore ر_1 = ٣١,٧٦$$

ـ لحساب قيمة الربيع الأعلى :

$$\text{ترتيب } ر_3 = \frac{٣ \times ٢٠٠}{٤} = ١٥٠$$

∴ فئة الربيع الأعلى هي ٤٠ ـ ٤٥

٤٠	١٢٥
$ر_3$	١٥٠
٤٥	١٦٧

$$\frac{ر_3 - ٤٠}{٤٥ - ٤٠} = \frac{١٥٠ - ١٢٥}{١٦٧ - ١٢٥}$$

$$\frac{ر_3 - ٤٠}{٥} = \frac{٢٥}{٤٢}$$

$$ر_3 = ٤٠ + \frac{١٢٥}{٤٢}$$

$$\therefore ر_3 = ٤٢,٩٨$$

∴ نصف المدى الربيعي = $\frac{1}{2}$(ر٣ - ر١)

$$= \frac{١}{٢} (٤٢,٩٨ - ٣١,٧٦) = \frac{١١,٢٢}{٢} = ٥,٦١$$

٢ ــ طريقة الرسم :

باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد لهذا التوزيع في شكل (٤ ــ ١) نجد أن :

ر١ = ٣١,٨ تقريباً

ر٣ = ٤٣ تقريباً

∴ نصف المدى الربيعي = $\frac{١}{٢}$ (٤٣ - ٣١,٨) = $\frac{١١,٢}{٢}$ = ٥,٦

ملاحظات : ــ

(١) إذا استخدمنا التوزيع التكراري المتجمع الهابط فإننا لإيجاد نصف المدى الربيعي نستخدم العلاقة التالية :

نصف المدى الربيعي = $\frac{1}{2}$(الربيع الأدنى - الربيع الأعلى)

(٢) يمكن استخدام الربيع الأدنى والربيع الأعلى مع الوسيط للتعرف على درجة تماثل أو التواء التوزيع باستخدام العلاقات التالية :

إذا كان :

* الربيع الأعلى - الوسيط = الوسيط - الربيع الأدنى
يكون التوزيع متماثل
* الربيع الأعلى - الوسيط > الوسيط - الربيع الأدنى
يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليمين
* الربيع الأعلى - الوسيط < الوسيط - الربيع الأدنى
يكون التوزيع ملتوياً ناحية اليسار

ثالثاً : الانحراف المتوسط Mean Deviation

الانحراف المتوسط هو متوسط الانحرافات المطلقة لمجموعة من القيم عن وسطها الحسابي وهو أحد مقاييس التشتت ويعطي مؤشراً على مدى تباعد أو تقارب مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي . أما متوسط الانحرافات فهو غير صالح كمقياس للتشتت حيث يساوي صفراً دائماً لأن المجموع الجبري لانحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً .

حساب الانحراف المتوسط من البيانات غير المبوبة :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ} \left| س - \overline{س} \right|}{ن} \qquad (٥ - ٢)$$

$$= \frac{\text{مجـ} \left| ح \right|}{ن}$$

مثال (٥ ــ ٢) :

احسب الانحراف المتوسط للقيم :

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

الحــل :

$$\text{الوسط الحسابي } (\overline{س}) = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

س	$|س - \bar{س}|$
٥	٢
٦	١
٧	صفرا
٨	١
٩	٢
٣٥	٦

∴ الانحراف المتوسط = $\frac{مجـ |س - \bar{س}|}{ن}$

$= \frac{٦}{٥}$

$= ١,٢$

حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف المتوسط من الجداول التكرارية نتبع الخطوات التالية :

- نحسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري .
- نحسب الانحرافات المطلقة بين مركز كل فئة والوسط الحسابي أي $|س - \bar{س}|$
- نضرب الانحرافات المطلقة لكل فئة × التكرار المناظر لكل فئة ونحصل على مجـ ك $|س - \bar{س}|$
- ونحصل على الانحراف المتوسط من العلاقة التالية :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{مجـ ك\ |س - \bar{س}|}{مجـ ك} \qquad (٥ـ٣)$$

$$= \frac{مجـ ك\ |ح|}{مجـ ك}$$

مثال (٥ ـ ٣) :

احسب الانحراف المتوسط للتوزيع التكراري في مثال (٤ ـ ٥) .

الحـل :

جـدول (٥ ـ ١)
حساب الانحراف المتوسط

فئـات	تكرار ك	س	| س - $\bar{س}$ |	ك | س - $\bar{س}$ |
٢٠ ـ	١٦	٢٢,٥	١٤,٧٥	٢٣٦
٢٥ ـ	٢١	٢٧,٥	٩,٧٥	١٠٤,٧٥
٣٠ ـ	٣٧	٣٢,٥	٤,٧٥	١٧٥,٧٥
٣٥ ـ	٥١	٣٧,٥	,٢٥	١٢,٧٥
٤٠ ـ	٤٢	٤٢,٥	٥,٢٥	٢٢٠,٥٠
٤٥ ـ	٢٤	٤٧,٥	١٠,٢٥	٢٤٦
٥٠ ـ ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥,٢٥	١٣٧,٢٥
المجمـوع	٢٠٠			١٢٣٣,٠٠

سبق حساب الوسط الحسابي ($\bar{س}$) = ٣٧,٢٥

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك } |س - \bar{س}|}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{١٢٣٣}{٢٠٠} = ٦,١٦٥$$

ملاحظات :

١ ـ يتضح صعوبة حساب الانحراف المتوسط نظراً لما يشتمله من كسور نتيجة حساب الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي .

٢ ـ يأخذ الانحراف المتوسط في اعتباره جميع القيم في المجموعة وهذا ما يميزه عن المدى ونصف المدى الربيعي إلاَّ أنه لا يستخدم على نطاق واسع لصعوبة عملياته الحسابية وعدم شيوع استخدامه في التطبيقات المختلفة .

٣ ـ هناك طريقة أخرى لحساب هذا المقياس وذلك بحساب الانحرافات المطلقة عن الوسيط وبالرغم من ذلك فإن حساب الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي هي الأكثر استخداماً في حساب الانحراف المتوسط .

رابعاً : الانحراف المعياري Standard Deviation

يعتبر الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت شيوعاً واستخداماً ويعتمد هذا المقياس على طريقة أُخرىٰ لتلافي تلاشي مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي (أهملنا الإشارة في حالة الانحراف المتوسط) وذلك بتربيع الانحرافات عن الوسط الحسابي وحساب متوسط مربعات هذه الانحرافات نحصل على ما يسمى بالتباين Variance ويرمز له بالرمز ($ع^2$) أي أن :

التباين ($ع^2$) هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي فإذا كان لدينا (ن) من القيم هي $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ وسطها الحسابي ($\overline{س}$) فإن :

$$ع^2 = \frac{مجـ (س - \overline{س})^2}{ن}$$

والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (ع) أي أن :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^2}{ن}}$$

خصائص الانحراف المعياري :

هناك مجموعة من الخصائص للانحراف المعياري تساعدنا على تبسيط القوانين المستخدمة في حسابه أهمها الخاصيتان التاليتان :

١ ــ الانحراف المعياري لا يتأثر بطرح أو جمع مقادير ثابتة من مفردات القيم الداخلة في حسابه . ولإثبات ذلك نفترض أن لدينا القيم :

$س_١$ ، $س_٢$ ، . . . . ، $س_ن$ وسطها الحسابي

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} \quad \text{وانحرافها المعياري} \quad ع = \sqrt{\frac{مجـ\ (س - \overline{س})^٢}{ن}}$$

نفترض أننا طرحنا المقدار الثابت (أ) من جميع المفردات السابقة لتصبح $س_١$ – أ ، $س_٢$ – أ ، . . . ، $س_ن$ – أ لها الوسط الحسابي

$$\overline{س}_١ = \frac{مجـ\ (س - أ)}{ن} = \frac{مجـ\ س}{ن} - أ = \overline{س} - أ$$

وذلك باستخدام خصائص المجموع في الفصل الأول ، ويكون انحرافها المعياري :

$$ع_١ = \sqrt{\frac{مجـ\ (س - أ - \overline{س}_١)^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{مجـ\ (س - أ - \overline{س} + أ)^٢}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{مجـ\ (س - \overline{س})^٢}{ن}} = ع$$

يلاحظ مما سبق أن الانحراف المعياري لم يتأثر بالطرح على عكس الوسط الحسابي .

٢ ـ الانحراف المعياري يتأثر بقسمة مفردات القيم الداخلة في حسابه على مقدار ثابت وكذلك الحال بالنسبة للضرب .

حساب الانحراف المعياري من البيانات غير المبوبة :

(١) **الطريقة المباشرة** : باستخدام التعريف السابق فإن :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

يلاحظ أنه يلزم حساب الوسط الحسابي للمجموعة أولاً قبل حساب الانحراف المعياري ويمكننا التغلب على ذلك إذا لاحظنا أن :

$$مجـ (س - \overline{س})^{٢} = مجـ (س^{٢} - ٢\,\overline{س}\,س + \overline{س}^{٢})$$

$$= مجـ س^{٢} - ٢\,\overline{س}\ مجـ س + ن\,\overline{س}^{٢}$$

$$= مجـ س^{٢} - ٢\frac{(مجـ س)^{٢}}{ن} + \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

$$= مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}$$

ومن ثم تؤول الصورة السابقة إلى :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}} \qquad (٥ - ٤)$$

(٢) طريقة الانحرافات أو الفروق البسيطة :

إذا استخدمنا وسطاً فرضياً (أ) وحصلنا على الانحرافات البسيطة (ح = س − أ) نستخدم الصورة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ح^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ ح}{ن}\right)^٢} \qquad (٥ - ٥)$$

(٣) طريقة الانحرافات أو الفروق المختصرة :

إذا قبلت الانحرافات البسيطة القسمة على مقدار ثابت (ث) فنحصل على الانحرافات المختصرة ($ح' = \frac{ح}{ث}$) وباستخدام الخصائص السابقة نجد أن الانحراف المعياري يتأثر بالمقدار الثابت . ولإثبات ذلك نفترض أن لدينا القيم : $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . . ، $س_ن$ وسطها الحسابي $\bar{س}$

وانحرافها المعياري (ع)

ونفترض أننا قسمنا جميع قيم المجموعة على مقدار ثابت (أ) لتصبح على النحو التالي :

$\frac{س_١}{أ}$ ، $\frac{س_٢}{أ}$ ، . . . . . ، $\frac{س_ن}{أ}$ وباستخدام خصائص المجموع

يصبح وسطها الحسابي :

$$\bar{س}_٢ = \frac{مجـ س}{ن} \div \frac{مجـ أ}{ن} = \frac{\bar{س}}{أ}$$

والانحراف المعياري :

$$ع_٢ = \sqrt{\frac{مجـ \left(\frac{س}{أ} - \bar{س}_٢\right)^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{مجـ \left(\frac{س}{أ} - \frac{\bar{س}}{أ}\right)^٢}{ن}}$$

$$= \frac{1}{أ} \sqrt{\frac{مجـ(س - \bar{س})^2}{ن}} = \frac{ع}{أ}$$

يلاحظ أن الانحراف المعياري للقيم بعد القسمة يكافىء الانحراف المعياري لها قبل عملية القسمة مقسوماً على المقدار الثابت .

ومن العلاقة السابقة فإن :

$$ع = أ ع_2$$

ويعني ذلك أنه يمكننا تبسيط العمليات الحسابية إذا وجد مقدار ثابت تقبل القسمة عليه جميع قيم المجموعة ويكون الانحراف المعياري للقيم الأصلية مساوياً للانحراف المعياري للقيم المختصرة مضروباً في المقدار الثابت . ولهذا إذا استخدمنا فكرة الانحرافات المختصرة ($ح' = \frac{ح}{ث}$) فإننا نستخدم الصورة التالية لحساب الانحراف المعياري :

$$ع = ث \sqrt{\frac{مجـ ح'^2}{ن} - \left(\frac{مجـ ح'}{ن}\right)^2} \qquad (٥ - ٦)$$

مثال (٥ ــ ٤) : احسب الانحراف المعياري للقيم التالية :

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

الحـــل :

س	$س^2$
٥	٢٥
٦	٣٦
٧	٤٩
٨	٦٤
٩	٨١
٣٥	٢٥٥

باستخدام الطريقة المباشرة

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٥٥}{٥} - \left(\frac{٣٥}{٥}\right)^2}$$

$$= \sqrt{٥١ - ٤٩} = \sqrt{٢}$$

∴ الانحراف المعياري = ١,٤١٤

مثال (٥ ــ ٥) :

احسب الانحراف المعياري والتباين للقيم التالية :

٦٥٥ ، ٦٦٠ ، ٦٦٥ ، ٦٧٠ ، ٦٧٥

الحـــل :

يتضح أن هذه القيم كبيرة ويمكن استخدام طريقة الانحـرافات البسيـطة باختيار وسط فرضي وليكن أ = ٦٦٠

س	ح = س - ٦٦٠	$ح^2$
٦٥٥	- ٥	٢٥
٦٦٠	صفر	صفر
٦٦٥	٥	٢٥
٦٧٠	١٠	١٠٠
٦٧٥	١٥	٢٢٥
	٢٥	٣٧٥

$$\therefore ع = \sqrt{\frac{مجـ ح^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ح}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٧٥}{٥} - \left(\frac{٢٥}{٥}\right)^{٢}} = \sqrt{٧٥ - ٢٥}$$

$$= \sqrt{٥٠} \quad = ٥ \sqrt{٢} = ٥ \times ١,٤١٤$$

∴ الانحراف المعياري = ٧,٠٧٠ والتباين = ٥٠

حل آخر :

يلاحظ أن الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على المقدار الثابت ٥ ويمكننا استخدام طريقة الانحرافات المختصرة كما يلي :

س	ح	$ح' = \frac{ح}{٥}$	$ح'^{٢}$
٦٦٥	٥ -	١ -	١
٦٦٠	صفر	صفر	صفر
٦٦٥	٥	١	١
٦٧٠	١٠	٢	٤
٦٧٥	١٥	٣	٩
		٥	١٥

$$\therefore ع = ث \sqrt{\frac{مجـ ح^2}{ن} - \left(\frac{مجـ ح}{ن}\right)^2}$$

$$= ٥ \sqrt{\frac{١٥}{٥} - \left(\frac{٥}{٥}\right)^2} \qquad = ٥ \sqrt{٣ - ١}$$

$$= ٥ \sqrt{٢} \quad = \quad ٧,٠٧$$

وهي نفس النتيجة السابقة

حساب الانحراف المعياري من البيانات المبوبة :

باستخدام خواص الانحراف المعياري وكما سبق في حالة البيانات غير المبوبة يمكن اثبات أن هناك طرقاً ثلاثاً لحساب الانحراف المعياري من الجداول التكرارية على النحو التالي :

(١) الطريقة المباشرة :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2 ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ س ك}{مجـ ك}\right)^2} \qquad (٥ - ٧)$$

(٢) باستخدام الانحرافات أو الفروق البسيطة :

إذا استخدمنا وسطاً فرضياً مناسباً وحسبنا الانحرافات البسيطة مع تطبيق الخصائص السابقة فيمكن حساب الانحرافات المعياري بالعلاقة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ} ح^{2} ك}{\text{مجـ} ك} - \left(\frac{\text{مجـ} ح ك}{\text{مجـ} ك}\right)^{2}} \qquad (٥ - ٨)$$

(٣) **باستخدام الانحرافات أو الفروق المختصرة :**

إذا كانت الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على مقدار ثابت (ث) نحسب الانحرافات المختصرة ونستخدم العلاقة :

$$ع = ث \sqrt{\frac{\text{مجـ} ح'^{2} ك}{\text{مجـ} ك} - \left(\frac{\text{مجـ} ح' ك}{\text{مجـ} ك}\right)^{2}} \qquad (٥ - ٩)$$

مثال (٥ ــ ٦) :

احسب الانحراف المعياري من الجدول التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال (٤ ــ ٥) .

الحل :

يمكن حساب الانحراف المعياري بإحدى الطرق الآتية :

(١) الطريقة المباشرة :

جـدول (٥ ـ ٢)

حساب الانحراف المعياري بالطريقة المباشرة

فئـات	تكرار ك	مراكز الفئات س	س ك	$س^2$ ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	٣٦٠	٨١٠٠,٠٠
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	٥٧٧,٥	١٥٨٨١,٢٥
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	١٢٠٢,٥	٣٩٠٨١,٢٥
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	١٩١٢,٥	٧١٧١٨,٧٥
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	١٧٨٥	٧٥٨٦٢,٥٠
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١١٤٠	٥٤١٥٠
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	٤٧٢,٥	٢٤٨٠٦,٢٥
المجموع	٢٠٠		٧٤٥٠	٢٨٩٦٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨٩٦٠٠}{٢٠٠} - \left(\frac{٧٤٥٠}{٢٠٠}\right)^2}$$

$$= \sqrt{٦٠,٤٣٧٥} \quad =٧,٧٧$$

(٢) طريقة الانحرافات البسيطة :

باختيار وسط فرضي ٣٧,٥ نحصل على الجدول التالي :

جـدول (٥ ـ ٣)

حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة

فئـات	ك	س	ح = س - ٣٧,٥	ح ك	$ح^{٢}$ ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	- ١٥	- ٢٤٠	٣٦٠٠
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	- ١٠	- ٢١٠	٢١٠٠
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	- ٥	- ١٨٥	٩٢٥
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	٥	٢١٠	١٠٥٠
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢٤٠	٢٤٠٠
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥	١٣٥	٢٠٢٥
المجموع	٢٠٠			- ٥٠	١٢١٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٢١٠٠}{٢٠٠} - \left(\frac{- ٥٠}{٢٠٠}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٦٠,٥ - ,٠٦٢٥} \quad = \sqrt{٦٠,٤٣٧٥}$$

$$= ٧,٧٧$$

٣ ــ طريقة الانحرافات المختصرة :

يلاحظ أن الانحرافات البسيطة تقبل القسمة على المقدار ٥ الذي يناظر طول الفئة ونحصل على الانحرافات المختصرة كما يتضح في الجدول التالي :

جـدول (٥ ـ ٤)

حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة

فئـات	ك	س	ح = س̄ - أ	ح/ = ح / ٥	ح/ ك	ح/٢ ك
٢٠ -	١٦	٢٢,٥	- ١٥	- ٣	- ٤٨	١٤٤
٢٥ -	٢١	٢٧,٥	- ١٠	- ٢	- ٤٢	٨٤
٣٠ -	٣٧	٣٢,٥	- ٥	- ١	- ٣٧	٣٧
٣٥ -	٥١	٣٧,٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٠ -	٤٢	٤٢,٥	٥	١	٤٢	٤٢
٤٥ -	٢٤	٤٧,٥	١٠	٢	٤٨	٩٦
٥٠ - ٥٥	٩	٥٢,٥	١٥	٣	٢٧	٨١
المجموع	٢٠٠				- ١٠	٤٨٤

$$ع = ث \sqrt{\frac{مجـ ح/^{٢} ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ح/ ك}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

$$= ٥ \sqrt{\frac{٤٨٤}{٢٠٠} - \left(\frac{-١٠}{٢٠٠}\right)^{٢}}$$

$$= ٥ \sqrt{٢,٤٢ - ,٠٠٢٥}$$

$$= ٥ \sqrt{٢,٤١٧٥}$$

$$= ٥ \times ١,٥٥٤٨ = ٧,٧٧$$

ملاحظـات :

(١) حصلنا على نفس النتيجة باستخدام الطرق الثلاث وعملياً تفضل الطريقة الأخيرة وخاصة في حالة التوزيعات التكرارية المنتظمة حيث يلاحظ سهولة العمليات الجبرية .

(٢) يمكن اتباع نفس الطرق السابقة في حالة التوزيعات التكرارية غير المنتظمة .

(٣) يلاحظ من جداول حساب الانحراف المعياري أنها لا تختلف عن جداول حساب الوسط الحسابي إلاَّ بإضافة العمود الأخير وعليه نستخدم جدولاً واحداً لحساب كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

معامل الاختلاف

Coefficient of Variation

عنـد مقارنـة التشتت لتوزيعين تكـرارين لظاهـرتين مختلفتين أو أكثر قـد نواجه بـاختلاف وحـدات القياس وعليـه يلزم أولاً البحث عن مقياس يخلصنـا من هـذه المشكلة فمثـلاً إذا كـان الانحـراف المعيـاري لـلأعمــار ٣ سنـوات والانحراف المعياري للأجور ٥ دينار ، يتضح أنـه لا يمكننا مقـارنة التشتت بين هاتين الظاهرتين .

ومعـامـل الاختـلاف يستخـدم في مقــارنـة التشتت بين المجمــوعـات المختلفة وله صورتان .

(١) معامل الاختلاف الميعاري = $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$

$$= \boxed{\frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠} \qquad (٥ - ١٠)$$

ويلاحظ أننا نحصل على نسبة مئـوية من الـوسط الحسابي ومحـرره من وحدات القياس ومن ثم يمكن استخدامه في مقارنة التشتت بين المجموعات المختلفة .

(٢) معامل الاختـلاف الربيعي = $\frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{متوسط الربيعين}} \times ١٠٠$

$$= \boxed{\frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠} \qquad (٥ - ١١)$$

ويستخدم هذه المقياس في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة حيث يتعذر حساب كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومن ثم يتعذر حساب معامل الاختلاف المعياري . كذلك لا يجب مقارنة معامل الاختلاف الربيعي لتوزيع معيّن بمعامل الاختلاف المعياري لتوزيع آخر بل يجب مقارنة التوزيعين باستخدام معاملين للاختلاف محسوبين بنفس الأساس .

مثال (٥ ــ ٧) :

احسب معامل الاختلاف المعياري ومعامل الاختلاف الربيعي للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠،من موظفي إحدى الشركات في مثال (٤ ــ ٥) .

الحــل : (١) سبق حساب كل من :

الوسط الحسابي = ٣٧,٢٥

الانحراف المعياري = ٧,٧٧

∴ معامل الاختلاف المعياري = $\frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$

$= \frac{٧,٧٧}{٣٧,٢٥} \times ١٠٠ = ٢٠,٨\%$

(٢) سبق حساب قيمة كل من :

الربيع الأدنى (ر١)= ٣١,٧٦

الربيع الأعلى (ر٣)= ٤٢,٩٨

∴ معامل الاختلاف الربيعي = $\frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$

$= \frac{٤٢,٩٨ - ٣١,٧٦}{٤٢,٩٨ + ٣١,٧٦} \times ١٠٠$

$= \frac{١١,٢٢}{٧٤,٧٤} \times ١٠٠ \quad = ١٥\%$

مقاييس الالتواء

Measures of Skewness

ذكرنا في نهاية الفصل الرابع أنه برسم المنحنى ومعرفة العلاقة بين الوسط الحسابي والمنوال والوسيط يمكن التعرف على طبيعة التوزيع التكراري من حيث التماثل والالتواء .

ويمكننا التعرف على طبيعة التوزيع من حيث الالتواء باستخدام العلاقات السابقة ومقاييس التشتت ودون رسم المنحنى عن طريق استخدام إحدى صور معامل الالتواء التالية .

(١) معامل الالتواء = $\frac{\text{الوسط الحسابي - المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$ (٥ ــ ١٢)

وحيث أن :

الوسط الحسابي ـ المنوال = ٣ (الوسط الحسابي - الوسيط)

فيمكن الحصول على صورة أخرى لمعامل الالتواء بالتعويض في الصورة الأولى .

(٢) معامل الالتواء = $\frac{\text{٣ (الوسط الحسابي - الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}}$ (٥ ــ ١٣)

وينسب المعاملان السابقان إلى بيرسون وهناك صورة أخرى لمعامل الالتواء تعتمد فقط على بعض مقاييس الموضع وهي :

(٣) معامل الالتواء = $\frac{(ر_3 - ر_2) - (ر_2 - ر_1)}{(ر_3 - ر_1)}$ (٥ ــ ١٤)

حيث أن :

ر١ الربيع الأدنى

ر٢ الوسيط

ر٣ الربيع الأعلى

وهذه العلاقة يمكن الحصول عليها بالرسم أو بالحساب وتستخدم في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

وللتعليق على النتائج المتحصل عليها من معامل الالتواء هناك ثلاث حالات :

(١) إذا كان معامل الالتواء يساوي صفراً فإن التوزيع متماثل .

(٢) إذا كان معامل الالتواء موجباً فإن التوزيع يكون ملتوياً ناحية اليمين

(٣) إذا كان معامل الالتواء سالباً فإن التوزيع يكون ملتوياً ناحية اليسار .

كما سبق عرضه في شكل (٤ ـ ٣)

مثال (٥ ـ ٨) :

احسب الصور المختلفة لمعامل الالتواء للتوزيع التكراري الذي يوضح التوزيع العمري لعينة حجمها ٢٠٠ من موظفي إحدى الشركات في مثال (٤ ـ ٥) .

الحـــل :

الوسط الحسابي = ٣٧,٢٥

الوسيـط = ٣٧,٥٥

الانحراف المعياري = ٧,٧٧

الربيع الأدنى = ٣١,٧٦

الربيع الأعلى = ٤٢,٩٨

كذلك فإنه يمكن حساب المنوال بطريقة الرافعة ونجد أن :

المنوال = ٣٧,٦٦

ومن ثم يمكن حساب الصور المختلفة لمعامل الالتواء على النحو التالي :

(١) معامل الالتواء = $\frac{\text{الوسط الحسابي - المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$ = $\frac{٣٧,٦٦ - ٣٧,٢٥}{٧,٧٧}$

= - ,٠٥ (إلتواء سالب)

(٢) معامل الالتواء = $\frac{\text{٣ (الوسط الحسابي - الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}}$

= $\frac{٣ (٣٧,٥٥ - ٣٧,٢٥)}{٧,٧٧}$ = $\frac{- ,٩}{٧,٧٧}$ = - ,١١

(إلتواء سالب)

(٣) معامل الالتواء = $\frac{(ر_٣ - ر_٢) - (ر_٢ - ر_١)}{ر_٣ - ر_١}$

= $\frac{(٣١,٧٦ + ٣٧,٥٥) - (٣٧,٥٥ - ٤٢,٩٨)}{(٣١,٧٦ - ٤٢,٩٨)}$

= $\frac{٥,٧٩ - ٥,٤٣}{١١,٢٢}$ = $\frac{- ,٣٦}{١١,٢٢}$

= - ,٠٣ (إلتواء سالب)

يلاحظ أنه باستخدام الصور المختلفة وجدنا أن معامل الالتواء سالب أي أن منحنى التوزيع التكراري يكون ملتوياً ناحية اليسار وبمعنى آخر فإن مفردات هذا التوزيع تتركز في اتجاه الفئات العليا ويمتد ذيل المنحنى التكراري إلى اليسار .

تمارين الفصل الخامس

(١) احسب المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري للقيم التالية :

٣٣ ، ٢١ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٢٢ ، ٢٣

(٢) من الجدول التكراري التالي :

فئات	١٤ـ	١٦ـ	١٨ـ	٢٠ـ	٢٢ـ	٢٤ ـ ٢٦
تكرار	١٣	٢٥	٣٠	٤٠	٢٤	١٥

أ ــ احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

ب ــ احسب نصف المدى الربيعي .

(٣) من الجدول التكراري التالي :

فئات	١٤ـ	١٥ـ	١٦ـ	١٧ـ	١٨ـ	١٩ـ	٢٠ـ٢١
تكرار	٧	١١	٢٢	٣٠	١٥	١٢	٣

أ ــ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومن ثم اشتق معامل الاختلاف .

ب ــ معامل الالتواء .

(٤) قارن بين التوائي التوزيعين التكراريين الآتيين لأجور عينة من عمال مصنعين :

الفئـات	أقل من ٣٠	٣٠ـ	٤٠ـ	٦٠ـ	٧٠ـ	٩٠ـ	١٠٠ فأكثر
عدد عمال المصنع الأول	١٨	٢٢	٣٥	٥٥	٤٠	١٩	١١
عدد عمال المصنع الثاني	٧	٢٣	٣٠	٥٠	٤٥	٢٥	٢٠

(٥) أوجد درجة تماثل التوزيع التكراري الآتي لأجور عمال أحد المصانع :

فئات الأجر	٣٥ـ	٤٥ـ	٥٥ـ	٦٥ـ	٧٥ـ	٨٥ـ	٩٥ـ١٠٥
عدد العمال	١٤	١٨	٢٢	٣٨	١٥	٧	٣

الفصل السادس

الأرقــام القياسيــة

Index Numbers

مقدمة وتعريف :

في كثير من الأحيان قد نحتاج إلى دراسة التغير في ظاهرة-ما من فترة زمنية لأخرى في أماكن مختلفة غالباً ما تكون فيها وحدات القياس مختلفة . والسبيل الوحيد في هذا الشأن هو اللجوء لحساب الأرقام القياسية والتي بدورها تخلصنا من وحدات القياس ومن ثم تسهل عملية المقارنة ودراسة التغيرات بسهولة ويسر. ونشأت فكرة الأرقام القياسية من الرغبة لقياس التغير في الأسعار بين فترات زمنية متتالية ثم تطور استخدامها لقياس التغير الذي يطرأ على الكميات والقيم بين فترات زمنية متعاقبة ، وعليه قد تستخدم الأرقام القياسية لمقارنة ظاهرة بنفسها بين فترتين زمنيتين وفي هذه الحالة يكون الهدف من تركيب الرقم القياسي هو قياس التغير الذي طرأ على ظاهرة معيّنة كالأسعار مثلاً في فترة من الزمن كأساس . أي أنه في العادة ندرس التغيرات بين فترتين زمنيتين الأولى نبدأ قياس التغير منها وتسمى فترة الأساس والثانية يراد قياس ما تمّ من تغير عندها وتسمى فترة المقارنة .

أمثلة على الأرقام القياسية :

(١) الرقم القياسي للأسعار :

من اهم مسئوليات الحكومات والنقابات على السواء هي مراقبة الأسعار ومراقبة العلاقة بين حركة مستوى الأسعار والحالة الاقتصادية العامة في

الدولة . فالأسعار هي حد التعامل بين المنتج والمستهلك الذي حصل على أساسه تبادل السلع والخدمات وتشمل إحصاءات الأسعار تسجيل أسعار السلع والخدمات المختلفة من وقت لآخر ثم تركيب الأرقام القياسية للأسعار للدليل على حركة مستوى الأسعار .

والرقم القياسي للأسعار يوضح النسبة بين متوسط الأسعار في سنة معيّنة إلى متوسط الأسعار في سنة أخرى كأساس . فمثلاً عندما يكون الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٥ إلى سنة ١٩٨٠ هو ١٢٠٪ فهذا يعني أن المتوسط العام للأسعار قد زاد بمعدل ٢٠٪ في سنة ١٩٨٥ بالمقارنة بسنة ١٩٨٠ .

(٢) الرقم القياسي لأسعار الجملة :

تقوم الإدارة المركزية للإحصاء التابعة لوزارة التخطيط بدولة الكويت بجمع بيانات تفصيلية عن أسعار التجزئة وأسعار الجملة من السلع المتداولة ، وحساب أرقام مناسبة لأسعار الجملة وأسعار التجزئة ونشرها بصفة دورية .

ويتم تركيب هذا الرقم بتسجيل أسعار الجملة للسلع المعيّنة وتحسب المناسيب لكل سلعة ثم يؤخذ متوسط هندسي بسيط للمناسيب بصرف النظر عن أهمية السلع .

(٣) الرقم القياسي لنفقة المعيشة :

يعطى هذا الرقم التغير في تكلفة المعيشة أي أسعار شراء الحاجيات التي يستهلكها السواد الأعظم من الشعب ويستخدم هذا الرقم بديلاً عن الرقم القياسي لأسعار التجزئة لأن الأسعار التي تدخل في تركيب هذا الرقم هي أسعار التجزئة وذلك لأن المستهلك العادي لا يقوم بشراء حاجياته بالجملة . وسوف نفرق بين ما يسمى بمستوى المعيشة ونفقة المعيشة .

أ ـ مستوى المعيشة :

هو كمية ما يستهلكه الفـرد في وحدة الـزمن (قد تكـون شهراً أو سنـة) من السلع والخدمات .

ب ـ نفقة المعيشة :

هي تكلفـة ما يستهلكـه الفرد من سلع وخـدمات . وهـذه التكلفة تتـأثر بالطبع بارتفـاع أو انخفاض مستـوى الأسعار بـافتراض ثبـات مستوى المعيشـة ولتركيب هذا الرقم تقوم الإدارة المركزية للإحصـاء بجمع بيـانات شهـرية عن أسعـار التجـزئـة للسلع والأشيـاء الـداخلة في الاستهـلاك ويكـون لكـل منهـا منسـوب السعر في الشهـر الحـالي بـالنسبـة للسعـر الأسـاسي ثم يكـون لكـل واحـدة من مجموعـات السلع رقم قياسي (هـو في الغـالب الـوسط الحسـابي لمنـاسيب الأسعـار للسلع الـداخلة في المجمـوعـة) على سبيـل المثـال مجموعات الأغـذية والسلع التـرفيهية ويكـون الرقم القيـاسي العام هـو الوسط المرجح لأرقـام المجموعـات مرجحـة بالأوزان . وهـذه الأوزان التي تستخدم لاعـطاء أهمية نسبيـة لمجموعـات السلع تختلف فيمـا بينهـا من بلد إلى آخـر وذلك تبعاً لتوزيع ميـزانية الأُسـرة العاديـة في كل بلد فمن المـلاحظة أن وزن الأغذية مثـلاً يأخـذ نسبة كبيـرة في ميزانيـة الأُسرة في البـلاد المختلفة ويـأخذ نسبـة أصغر في ميـزانية الأُسـرة في البلاد المتقـدمة وذلـك على عكس السلع الترفيهية أو الكمالية .

ونتيجـة لذلـك لا يمكن استخدام الأرقـام القيـاسيـة لنفقـة المعيشـة في المقارنة بين البـلاد المختلفة على عـلاتها بـل يجب أن يشمل الـرقم القياسي لنفقة المعيشة كل السلع الضروريـة والكماليـة وكل مجمـوعة من السلع يجب أن تعطي لها أوزان حقيقية .

(٤) الرقم القياسي للانتاج :

يقيس هذا الرقم التغيرات التي تحدث في كمية الانتاج الكلي أو في الصناعات المنفردة كل عام على حدة . فيوجد الرقم القياسي للانتاج الزراعي والرقم القياسي لانتاج الأرز أو القمح وتستخدم هذه الأرقام كدليل على درجة النشاط الاقتصادي سواء كان دليلاً على الكساد أو الازدهار كذلك يصور الرقم القياسي للانتاج وحركة الانتاج بصورة تفصيلية (كل شهر أو شهرين) وبصورة اجمالية (كل سنة) .

(٥) الرقم القياسي للأجور :

ويصور هذا الرقم التغيرات التي تطرأ على مستوى الأجور من وقت لآخر . ولتركيب هذا الرقم نحدد فترة الأساس ونأخذ مستوى الأجور في الصناعات الهامة أي نحسب المتوسط العام للأجور فيها ونحسب منسوب الأجر في سنة الأساس . ثم نركب من هذه المناسيب الرقم القياسي للأجور مع ترجيح الصناعات المختلفة بما يتناسب وأهميتها . وهذا أفضل من الصناعات المختلفة في سنة معيّنة لأن جملة ما يدفع من الأجور يمثل في نفس الوقت عدد العمال المستخدمين في الصناعة محل الاعتبار وكذلك متوسط الأجور .

ويستخدم هذا المقياس في ايجاد الرقم القياسي للأجر الحقيقي باستخدام العلاقة .

$$\text{الرقم القياسي للأجر الحقيقي} = \frac{\text{الرقم القياسي للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسي لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\text{الرقم القياسي للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسي للأسعار}} \times ١٠٠$$

وهذا الرقم يعطي حقيقة التغير في المستوى الاجتماعي للعمال حيث أن زيادة الأجور النقدية لا تعني في كثير من الأحيان زيادة في الدخل الحقيقي إلاَّ إذا كان الرقم القياسي للأسعار ثابتاً . وارتفاع هذا الرقم يعني ارتفاع مستوى معيشة العاملين .

ولقد اقترح فلورنس في سنة ١٩٢٩ مقياساً لقياس الرفاهية العامة يسمى دليل الرفاهية ويمكن حسابه من العلاقة التالية :

$$\text{دليل الرفاهية} = \frac{\text{الرقم القياسي للأجور} \times \text{النسبة المئوية لعدد العمال المشتغلين}}{\text{الرقم القياسي لنفقة المعيشة}}$$

(٦) الرقم القياسي لأسعار الأوراق المالية :

نحسب هذا الرقم لمراقبة حركة أسعار الأوراق المالية فنختار مجموعة من الأوراق المالية التي تمثل السوق تمثيلاً صحيحاً ويتفق على فترة الأساس ثم نحسب المناسيب لسعر كل ورقة مالية على حدة ثم نحسب الرقم القياسي للكل ونأخذ في الاعتبار الأهمية النسبية للأوراق المالية المختلفة الداخلة في الحساب ومن المعروف أن :

$$\text{الرقم القياسي لقيمة النقود} = \frac{١}{\text{الرقم القياسي للأسعار}}$$

على اعتبار أن قيمة وحدة النقد هي كمية السلع والخدمات التي تسيطر عليها وحدة النقد في السوق ، ومقلوب الرقم القياسي للأسعار هو الرقم القياسي لقيمة النقود حيث ان ارتفاع الأسعار يعني انخفاض قيمة النقود وانخفاض مستوى الأسعار يعني ارتفاع قيمة النقود .

وهناك أنواع أخرى من الأرقام القياسية منها على سبيل المثال لا الحصر الأرقام القياسية للناتج القومي والدخل القومي والصادرات والواردات ، كما توجد هذه الأرقام في صورة تفصيلية وإجمالية كما يوجد لكل قطاع على حدة أي على مستوى القطاع الزراعي والقطاع الصناعي .

وهناك اعتباران يجب الإلمام بهما ودراستهما قبل البدء في تركيب الأرقام القياسية وهما :

١ ـ اختيار فترة الأساس :

نقطة البدء في تكوين الرقم القياسي هي تحديد فترة الأساس ويشترط فيها أن تكون فترة عادية أو طبيعية خالية من التغيرات غير المنتظمة أو العرضية .

فمثلاً عند اختيار فترة الأساس لرقم قياسي للأسعار نختار فترة خالية من التغيرات الموسمية أي بعيدة عن فترات التضخم والانكماش التي تطرأ على الظواهر الاقتصادية المختلفة .

كذلك يجب مراعاة ألَّا تكون فترة الأساس بعيدة جداً عن الفترات التي تقاس على أساسها لأن التباعد الزمني يجعل من الصعب علينا الحصول على أسعار نفس السلع في الفترتين فكثير من السلع ربما يكون قد انقرض أو قل استخدامه بين الفترات المتباعدة نظراً لتغير نمط الاستهلاك .

٢ ـ اختيار المفردات التي يتكون منها الرقم القياسي :

يجب أن تكون الرؤية واضحة عند البداية ـ إذا اتخذنا الأسعار كمثال ـ حول ما نستهدف قياسه بواسطة الرقم القياسي للأسعار لأنه لا يمكن القول أنه يوجد رقم قياسي واحد للأسعار فالرقم القياسي يختلف للسلعة الواحدة

باختلاف نوعها (مادة خام أو نصف مصنوعة أو منتهية الصنع أو سلعة زراعية أو صناعية . . .) أو اختلاف طريقة بيعها (مثل أسعار الجملة وأسعار التجزئة).

فمثلاً لقياس التغير في أسعار التجزئة لسلعة كالبرتقال وجب أن يتوافر لدينا سعر التجزئة للبرتقال في فترتي الأساس والمقارنة .

طرق تركيب الأرقام القياسية

من الواضح أنه ليست هناك مشكلة في قياس تغير سعر سلعة واحدة بين فترتين وعلى سبيل المثال إذا كان سعر كيلو البرتقال في سنة ١٩٨٠ هو ٢٠٠ فلس وكان سعر الكيلو من نفس النوع هو ٣٠٠ فلس سنة ١٩٨٥ ، باختيار سنة ١٩٨٠ كأساس (١٠٠٪)

$$\text{السعر في سنة المقارنة ١٩٨٥} = \frac{\text{أسعار المقارنة}}{\text{أسعار الأساس}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠٠}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ١٥٠٪$$

ونقول في هذه الحالة أن الأسعار زادت بنسبة ٥٠٪ في سنة المقارنة عمّا كانت عليه في سنة الأساس . أي أن منسوب السعر وهو خارج قسمة السعر في سنة المقارنة على السعر في سنة الأساس يبين التغير بالزيادة أو بالنقص وقدرة في المائة فإذا كان منسوب السعر يزيد عن ١٠٠ فالزيادة عن ١٠٠ تمثل مقدار الزيادة في المائة في فترة المقارنة عن فترة الأساس وإذا كان المنسوب يقل عن ١٠٠ فالفرق بينه وبين ١٠٠ تمثل نقصاً في المائة في فترة المقارنة عن فترة الأساس .

والمشكلة تظهر بوضوح عند دراسة التغير في أسعار سلع مختلفة كثيرة بذلك يلزم العثور على صيغة لربط الأسعار المختلفة ببعضها .

قبل التطرق للصيغ الرياضية المختلفة دعنا نستعرض أهم الرموز المستخدمة :

ق	ترمز إلى	الرقم القياسي للأسعار
$ع_1$	ترمز إلى	سعر السلعة في سنة المقارنة
$ع_0$	ترمز إلى	سعر السلعة في سنة الأساس
$ك_1$	ترمز إلى	كمية كل سلعة في سنة المقارنة
$ك_0$	ترمز إلى	كمية كل سلعة في سنة الأساس

وأهم الصور الرياضية المستخدمة في حساب الأرقام القياسية هي : ـ

أولاً : الرقم القياسي التجميعي البسيط :

وصيغته هي :

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

أي أن :

$$ق = \frac{مجـ ع_1}{مجـ ع_0} \times ١٠٠ \qquad (٦ـ١)$$

الرقم التجميعي البسيط هو أبسط الصيغ التي يمكن استخدامها في تركيب الأرقام القياسية ولكن يعيب عليه أنه لا يفرق بين السلع المختلفة الداخلة في تركيبه من حيث أهميتها الانتاجية أو الاستهلاكية .

مثال : (٦ ــ ١)

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار سنة المقارنة بالنسبة إلى سنة الأساس من الجدول التالي الذي يوضح أسعار ثلاث سلع مختلفة بين سنتي ١٩٨٢ ، ١٩٨٦ باعتبار سنة ١٩٨٢ كأساس .

السلعة	الأسعار بالدينار	
	فترة الأساس ١٩٨٢ $ع_{٠}$	فترة المقارنة ٨٦ $ع_{١}$
أ	٨	١٥
ب	٥	٨
جـ	٣	٧
المجموع	١٦	٣٠

$$\therefore ق = \frac{مجـ ع_{١}}{مجـ ع_{٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠}{١٦} \times ١٠٠ = ١٨٧,٥ \%$$

أي أن الأسعار في سنة المقارنة قد زادت بنسبة ٨٧,٥٪ عنها في سنة الأساس .

ثانياً : الرقم القياسي التجميعي المرجح :

للتخلص من عيوب الرقم القياسي التجميعي البسيط نلجأ إلى هذا الرقم وذلك بإعطاء أهمية للسلع المختلفة كل على حسب أهميته ويتم الترجيح في هذه الحالة باستخدام الكميات ، وحيث أن هناك كميات لفترة الأساس وكميات لفترة المقارنة فهناك مقياسان هما :

(أ) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات الأساس :

ويسمى رقم لاسبير Laspeyres's Index .

$$\text{ق} = \frac{\text{مجموع أسعار المقارنة × كميات الأساس}}{\text{مجموع أسعار الأساس × كميات الأساس}} \times ١٠٠$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{ق} = \frac{\text{مجـ}\,ع_{١}\,ك_{٠}}{\text{مجـ}\,ع_{٠}\,ك_{٠}} \times ١٠٠} \qquad (٦-٢)$$

(ب) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات المقارنة :

ويسمى رقم باشي Paasche Index .

$$= \frac{\text{مجموع أسعار المقارنة × كميات المقارنة}}{\text{مجموع أسعار الأساس × كميات المقارنة}} \times ١٠٠$$

$$\boxed{\text{ق} = \frac{\text{مجـ}\,ع_{١}\,ك_{١}}{\text{مجـ}\,ع_{٠}\,ك_{١}} \times ١٠٠} \qquad (٦-٣)$$

مثال : (٦ ــ ٢) :

احسب الرقم القياسي التجميعي المرجح من الجدول التالي الذي يوضح كميات وأسعار ثلاث سلع مختلفة بين سنتي ١٩٨٢ ، ١٩٨٦ .

(اعتبر سنة ١٩٨٢ هي الأساس) .

السلع	سنة ١٩٨٢		سنة ١٩٨٦	
	الأسعار	الكميات بالألف طن	الأسعار	الكميات بالألف طن
أ	٨	٨٠	١٥	١٠٠
ب	٥	٤٠	٨	٥٠
جـ	٣	٦٠	٧	١٢٠

الحـــل :

(أ) باستخدام كميات سنة الأساس (لاسبير)

السلع	ع.	ع١	ك.	ع١ ك.	ع. ك.
أ	٨	١٥	٨٠	١٢٠٠	٦٤٠
ب	٥	٨	٤٠	٢٢٠	٢٠٠
جـ	٣	٧	٦٠	٤٢٠	١٨٠
المجموع				١٩٤٠	١٠٢٠

$$ق = \frac{\text{مجـ ع١ ك.}}{\text{مجـ ع. ك.}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٩٤٠}{١٠٢٠} \times ١٠٠ = ١٩٠,٢٪$$

أي أن الأسعار زادت بنسبة ٩٠,٢٪ في سنة ١٩٨٦ عنها في سنة ١٩٨٢ .

(ب) باستخدام كميات سنة المقارنة (باشي)

السلع	$ع_.$	$ع_١$	$ك_١$	$ع_١ ك_١$	$ع_. ك_١$
أ	٨	١٥	١٠٠	١٥٠٠	٨٠٠
ب	٥	٨	٥٠	٤٠٠	٢٥٠
جـ	٣	٧	١٢٠	٨٤٠	٣٦٠
المجموع				٢٧٤٠	١٤١٠

$$\therefore ق = \frac{مجـ ع_١ ك_١}{مجـ ع_. ك_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٧٤٠}{١٤١٠} \times ١٠٠ = ١٩٤,٣٣٪$$

أي أن الأسعار في ١٩٨٦ قد زادت بنسبة ٩٤,٣٣٪ عنها في سنة ١٩٨٢ .

ثالثاً : الرقم القياسي الأمثل (رقم فيشر) Fisher Index :

استطاع فيشر أن يتوصل إلى صيغة رياضية جديدة وذلك بإدماج الرقمين التجميعين المرجحين (رقم لاسبير ورقم باشي) باستخدام فكرة الوسط الهندسي على النحو التالي :

$$الرقم\ القياسي\ الأمثل = \sqrt{رقم\ لاسبير \times رقم\ باشي}$$

$$ق = \sqrt{\frac{مجـ ع_١ ك_.}{مجـ ع_. ك_.} \times \frac{مجـ ع_١ ك_١}{مجـ ع_. ك_١}} \times ١٠٠ \qquad (٦ - ٤)$$

ويمتاز هذا الرقم بأنه يحقق شرطي الانعكاس في الزَمن وفي المعامل وهي من الصفات النظرية الأساسية التي يتطلبها تكوين رقم قياسي والتي سنوضحها فيما بعد .

مثال : (٦ ــ ٣) :

احسب الرقم القياسي الأمثل من المثال السابق .

الحــل :

$$\text{الرقم القياسي الأمثل} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باشي}}$$

$$= \sqrt{١٩٠,٢ \times ١٩٤,٣٣} = ١٩٢,٢٥٪$$

أي أن أسعار سنة المقارنة تزيد بنسبة ٩٢,٢٥٪ عنها في سنة الأساس .

رابعاً : الرقم القياسي للمناسيب

المنسوب : هو نسبة سعر إلى سعر آخر أي أن :

$$\text{المنسوب} \ (م) = \frac{ع_١}{ع_٠} \qquad (٦ ــ ٥)$$

ويفضل البعض استخدام المناسيب لأنها تأخذ في الاعتبار علاقة السعر بطبيعة السلعة ذاتها لأن سعر كل سلعة مرتبط بالسلعة نفسها من حيث كونها متوفرة أو نادرة ومن حيث كونها معتدلة الطلب أو حادة الطلب . . . مما يؤثر على السعر ارتفاعاً وانخفاضاً ونستخدم فكرة الأوساط الحسابية والهندسية في حساب الأرقام القياسية للمناسيب والتي يمكن تلخيصها فيما يلي : ــ

أ ـ باستخدام الوسط الحسابي

١ ـ الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة :

$$ق = \frac{مجـ م}{ن} \times ١٠٠ \qquad (٦ - ٦)$$

٢ ـ الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة :

نستخدم في ترجيح مناسيب الأسعار الأوزان أي حاصل ضرب الكمية في السعر بينما استخدمنا في ترجيح الأسعار الكميات فقط لأن مناسيب السلع إذا رجحت بالكميات المناظرة مع اختلاف وحداتها فإنه يتعذر الحصول على متوسط لها لعدم امكانية الحصول على مجموعها .

ونستخدم الصورة التالية :

$$ق = \frac{مجـ م و}{مجـ و} \times ١٠٠ \qquad (٦ - ٧)$$

حيث (و) تشير إلى الوزن ويمكن أن تأخذ إحدى الصور التالية :

و $= ع_١ \times ك_١$ (أوزان سنة المقارنة)

$= ع_٠ \times ك_٠$ (أوزان سنة الأساس)

$= ع_١ \times ك_٠$ (أسعار المقارنة × كميات الأساس)

$= ع_٠ \times ك_١$ (أسعار الأساس × كميات المقارنة)

ب ــ باستخدام الوسط الهندسي

١ ــ الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة :

$$ق = \sqrt[ن]{م_١ \times م_٢ \times \ldots \times م_ن} \times ١٠٠ \qquad (٦ - ٨)$$

حيث (ن) عدد السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي .

٢ ــ الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة :

$$ق = \sqrt[مجـ و]{م_١^{و_١} \times م_٢^{و_٢} \times \ldots \times م_ن^{و_ن}} \times ١٠٠ \qquad (٦ - ٩)$$

حيث ($و_١$ ، $و_٢$ ، . . . . ، $و_ن$) هي أوزان السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي وأن :

$$مجـ و = و_١ + و_٢ + \ldots + و_ن$$

مثال : (٦ ـ ٤) :

من بيانات المثال السابق احسب :

١ ــ الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة .
٢ ــ الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة (باستخدام أوزان الأساس) .
٣ ــ الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة .
٤ ــ الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة (باستخدام أوزان الأساس)

الحـــل :

السلع	$ع_1$	$ع_0$	$ك_1$	$ك_0$	المنسوب $م = \frac{ع_1}{ع_0}$	أوزان الأساس $و = ع_0 . ك_0$	م و
أ	١٥	٨	١٠٠	٨٠	١,٩	٦٤٠	١٢١٦
ب	٨	٥	٥٠	٤٠	١,٦	٢٠٠	٣٢٠
جـ	٧	٣	١٢٠	٦٠	٢,٣	١٨٠	٤١٤
المجموع					٥,٨	١٠٢٠	١٩٥٠

١ ـ الوسط الحسابي للمناسيب البسيطة = $\frac{\text{مجـ م}}{\text{ن}} \times ١٠٠$

$= \frac{٥,٨}{٣} \times ١٠٠ = ١٩٣,٣\%$

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩٣,٣٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس

٢ ـ الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة (بأوزان الأساس)

$= \frac{\text{مجـ م و}}{\text{مجـ و}} \times ١٠٠$ حيث $و = ع_0 \times ك_0$

$= \frac{١٩٥٠}{١٠٢٠} \times ١٠٠ = ١٩١,١٨\%$

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩١,١٨٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس .

٣ ــ الوسط الهندسي للمناسيب البسيطة :

$$ق = \sqrt[٣]{م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times ١٠٠}$$

$$= \sqrt[٣]{١,٩ \times ١,٧ \times ٢,٣ \times ١٠٠}$$

باستخدام اللوغاريتمات :

$$لوق = \frac{١}{٣} \; لو(١,٩ \times ١,٦ \times ٢,٣)$$

$$= \frac{١}{٣} \; (لو١,٩ + لو١,٦ + لو٢,٣)$$

$$= \frac{١}{٣} \; (,٢٧٨٨ + ,٢٠٤١ + ,٣٦١٧)$$

$$= \frac{,٨٤٤٤٦}{٣} = ,٢٨١٥$$

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات

ق = ١٩١,٢٪

∴ الأسعار زادت بنسبة ٩١,٢٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس.

٤ ــ الوسط الهندسي للمناسيب المرجحة (بأوزان الأساس)

$$ق = \sqrt[مجـ و]{م_١^{و_١} \times م_٢^{و_٢} \times م_٣^{و_٣} \times ١٠٠}$$

$$= \sqrt[١٠٢٠]{(١,٩)^{٦٤٠} \times (١,٦)^{٢٠٠} \times (٢,٣)^{١٨٠}}$$

وباستخدام اللوغاريتمات :

$$\text{لو ق} = \frac{١}{١٠٢٠} (٦٤٠ \text{ لو } ١,٩ + ٢٠٠ \text{ لو } ١,٦ + ١٨٠ \text{ لو } ٢,٣)$$

$$= \frac{١}{١٠٢٠} (٦٤٠ \times ,٢٧٨٨ + ٢٠٠ \times ,٢٠٤١ + ١٨٠ \times ,٣٦١٧)$$

$$= \frac{١}{١٠٢٠} (١٧٨,٤٣٢ + ٤٠,٨٢ + ٦٥,١٠٦) = ,٢٧٨٨$$

ومن الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

ق = ١٩٠٪

أي أن الأسعار زادت بنسبة ٩٠٪ في سنة المقارنة عنها في سنة الأساس .

الأرقام القياسية للكميات :

أخذنا في عرضنا السابق الأسعار كمثال لتركيب الأرقام القياسية ، وبالمثل يمكن تركيب أرقام قياسية للكميات بنفس الطرق السابقة مع ملاحظة استخدام الأسعار أو القيم كأوزان . وعلى سبيل المثال :

١ ـ الرقم القياسي البسيط للكميات :

$$\text{ق} = \frac{\text{مجـ ك}_{١}}{\text{مجـ ك}_{.}} \times ١٠٠$$

٢ ـ الرقم القياسي المرجح للكميات بأسعار الأساس (لاسبير) :

$$\text{ق} = \frac{\text{مجـ ك}_{١} \text{ع}_{.}}{\text{مجـ ك}_{.} \text{ع}_{.}} \times ١٠٠$$

٣ ـ الرقم القياسي المرجح للكميات بأسعار سنة المقارنة (باشي) :

$$ق = \frac{مجـ ك_1 ع_1}{مجـ ك_. ع_1} \times ١٠٠$$

٤ ـ الرقم القياسي الأمثل للكميات (فيشر) :

$$ق = \sqrt{رقم\ لاسبير \times رقم\ باشي}$$

الأرقام القياسية للقيم :

يمكن تركيب أرقام قياسية للقيم بنفس الطرق السابقة ونأخذ على سبيل المثال : ـ

$$الرقم\ القياسي\ البسيط\ للقيم = \frac{مجموع\ قيم\ سنة\ المقارنة}{مجموع\ قيم\ سنة\ الأساس} \times ١٠٠$$

$$ق = \frac{مجـ ع_1 ك_1}{مجـ ع_. ك_.} \times ١٠٠$$

الأرقام القياسية بأساس ثابت
والأرقام القياسية بأساس متحرك

نلجأ إلى حساب الأرقام القياسية بأساس متحرك لإيجاد مرونة غير متوفرة في الأرقام القياسية بأساس ثابت وذلك إذا ما توافرت لدينا سلسلة زمنية من البيانات .

فإذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية على النحو التالي :

- الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٣ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ وترمز له بالرمز (ق٠١) .
- الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٤ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٣ ونرمز له بالرمز (ق١٢) .
- الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٥ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٤ ونرمز له بالرمز (ق٢٣) .
- الرقم القياسي للأسعار في سنة ١٩٨٦ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٥ ونرمز له بالرمز (ق٣٤) .

وهكـــذا .

وتسمى هذه بسلسلة الأرقام القياسية بأساس متحرك حيث أن الأساس يتحرك من سنة إلى أخرى ومن الواضح أنه توجد علاقة بين الأرقام القياسية بأساس متحرك والأرقام القياسية بأساس ثابت حيث ان :

$ق_{٤٠} = ق_{١٠} \times ق_{٢١} \times ق_{٣٢} \times ق_{٤٣}$ يعطينا الرقم القياسي لسنة ١٩٨٦ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ كأساس كذلك فإن

$ق_{٢٠} = ق_{١٠} \times ق_{٢١}$ يعطي الرقم القياسي لسنة ١٩٨٤ بالنسبة لسنة ١٩٨٢ .

$ق_{٣٠} = ق_{١٠} \times ق_{٢١} \times ق_{٣٢}$ يعطي الرقم القياسي لسنة ١٩٨٥ بالنسبة لسنة ١٩٨٢.

مثال (٦ ــ ٥) :

البيانات التالية توضح أسعار ثلاث سلع تقوم بانتاجها إحدى الشركات الكبرى في الفترة ما بين سنة ١٩٨٢ حتى عام ١٩٨٦ .

السنوات / السلع	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
(أ)	١٨٠	١٨٢	١٨٥	١٩٠	١٨٥
(ب)	١٩٥	١٩٧	١٩٢	١٩٤	١٩٣
(جـ)	١١٠	١١٥	١٢٠	١٣٠	١٣٥
المجموع	**٤٨٥**	**٤٩٤**	**٤٩٧**	**٥١٤**	**٥١٣**

والمطلوب :

حساب الأرقام القياسية بأساس متحرك ثم أوجد رقم قياسي لكل سنة على حدة .

الحل :

بافتراض سنة ١٩٨٢ كأساس (١٠٠٪) ونجري الحسابات التالية :

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٣ :

$$\text{السلعة (أ)} = \frac{١٨٢}{١٨٠} \times ١٠٠ = ١٠١,١١٪$$

السلعة (ب) = $\frac{١٩٧}{١٩٥} \times ١٠٠ = ١٠١,٠٣\%$

السلعة (جـ) = $\frac{١١٥}{١١٠} \times ١٠٠ = ١٠٤,٥٥\%$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٤ :

السلعة (أ) = $\frac{١٨٥}{١٨٢} \times ١٠٠ = ١٠١,٦٥\%$

السلعة (ب) = $\frac{١٩٢}{١٩٧} \times ١٠٠ = ٩٧,٤٦\%$

السلعة (جـ) = $\frac{١٢٠}{١١٥} \times ١٠٠ = ١٠٤,٣٥\%$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٥ :

السلعة (أ) = $\frac{١٩٠}{١٨٥} \times ١٠٠ = ١٠٢,٧٠\%$

السلعة (ب) = $\frac{١٩٤}{١٩٢} \times ١٠٠ = ١٠١,٠٤\%$

السلعة (جـ) = $\frac{١٣٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٠٨,٣٣\%$

بالنسبة إلى سنة ١٩٨٦ :

السلعة (أ) = $\frac{١٨٥}{١٩٠} \times ١٠٠ = ٩٧,٣٧\%$

السلعة (ب) = $\frac{١٩٢}{١٩٤} \times ١٠٠ = ٩٩,٤٨\%$

السلعة (جـ) = $\frac{١٣٥}{١٣٠} \times ١٠٠ = ١٠٣,٨٥\%$

والجدول التالي يلخص هذه الحسابات ويشمل الأرقام القياسية لكل سنة بأساس متحرك :

السلع	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦
(أ)	١٠٠	١٠١,١١	١٠١,٦٥	١٠٢,٧٠	٩٧,٣٧
(ب)	١٠٠	١٠١,٠٣	٩٧,٤٦	١٠١,٠٤	٩٩,٤٨
(جـ)	١٠٠	١٠٤,٥٥	١٠٤,٣٥	١٠٨,٣٣	١٠٣,٨٥
المجموع	٣٠٠	٣٠٦,٦٩	٣٠٣,٤٦	٣١٢,٠٧	٣٠٠,٧٠
المتوسط	١٠٠	١٠٢,٢٣	١٠١,١٥	١٠٤,٠٢	١٠٠,٢٣
المتوسط بأساس متحرك	١٠٠	١٠٢,٢٣	٩٨,٩٤	١٠٢,٨٤	٩٦,٣٦

اختبار الأرقام القياسية

اقترح فيشر اختبارين لاختبار الأرقام القياسية هما :

١ ـ اختبار الانعكاس الزمني .
٢ ـ اختبار الانعكاس المعاملي .

والرقم القياسي الذي يحقق هذين الاختبارين يعتبر رقماً قياسياً أمثلاً . وسوف نتحقق من أن رقم فيشر هو الرقم الوحيد الذي يحقق هاذين الاختبارين .

أولاً : اختبار الانعكاس الزمني :

مضمون هذا الاختبار أنه بتغيير سنة الأساس إلى سنة مقارنة وسنة المقارنة إلى سنة الأساس فإنه يلزم أن تتحقق القاعدة التالية :

الرقم القياسي × البديل الزمني له = ١

وبصورة رمزية نجد أنه لتطبيق هذا الاختبار فإن :

$ع_1$	تتحول إلى	$ع_0$
$ع_0$	تتحول إلى	$ع_1$
$ك_1$	تتحول إلى	$ك_0$
$ك_0$	تتحول إلى	$ك_1$

وبتطبيق ذلك على الأرقام القياسية السابقة فنجد أن :

١ ـ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار يحقق شرط الانعكاس الزمني

حيث أن الرقم القياسي التجميعي البسيط = $\frac{مجـ ع_1}{مجـ ع_0}$

$$\text{البديل الزمني له} = \frac{\text{مجـ ع}_0}{\text{مجـ ع}_1}$$

وبتطبيق قاعدة الاختبار نجد أن :

$$\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_0}{\text{مجـ ع}_1} = 1$$

وكذلك يمكن إثبات أن الأرقام القياسية التجميعية البسيطة للكميات والقيم تحقق شرط الانعكاس الزمني أيضاً .

٢ ـ الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار بكميات الأساس (لاسبير) لا يحقق شرط الانعكاس الزمني لأن :

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_0}$$

$$\text{البديل الزمني} = \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_1}$$

∴ الرقم القياسي × بديلة الزمني

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_1} \neq 1$$

وبالمثل يمكن إثبات أن الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار بكميات سنة المقارنة (باشي) لا يحقق شرط الانعكاس الزمني أيضاً .

٣ ـ الرقم القياسي لفيشر يحقق شرط الانعكاس الزمني حيث أن :

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ك}_0}}$$

$$\text{البديل الزمني} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع. ك.}}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك.}} \times \frac{\text{مجـ ع. ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}}$$

ومن ثم نجد أن الرقم القياسي × بديله الزمني

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع.ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك.}}{\text{مجـ ع.ك.}}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ع.ك.}}{\text{مجـ ع}_1\text{ك.}} \times \frac{\text{مجـ ع.ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}} = 1$$

ثانياً : اختبار الانعكاس المعاملي

مضمون هذا الاختبار أننا نحصل على البديل المعاملي لأي رقم قياسي وذلك بتحويل الكميات إلى أسعار والأسعار إلى كميات أي أن :

ك تتحول إلى ع

ع تتحول إلى ك

ويلزم أن تتحقق القاعدة التالية :

الرقم القياسي × البديل المعاملي = منسوب القيم

$$= \frac{\text{القيمة في سنة المقارنة}}{\text{القيمة في سنة الاساس}} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع. ك.}}$$

وبتطبيق هذا الاختبار على الأرقام القياسية التي سبق دراستها نجد أن :

١ ــ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار :

$$\text{ق} = \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع.}}$$

$$\text{البديل المعاملي} = \frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك.}}$$

∴ الرقم القياسي × البديل المعاملي

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك}_0} \neq \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0}$$

∴ الرقم التجميعي البسيط للأسعار لا يحقق الانعكاس المعاملي بالرغم من أنه حقق شرط الانعكاس الزمني .

٢ ـ الرقم القياسي لفيشر :

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0}}$$

$$\text{البديل المعاملي} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0}}$$

∴ الرقم الزمني × البديل المعاملي

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_1} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1)^2}{(\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0)^2}} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} = \text{منسوب القيم}$$

∴ الرقم القياسي لفيشر يحقق شرط الانعكاس المعاملي فضلاً على أنه يحقق شرط الانعكاس الزمني . ومن هنا كانت تسميته بالرقم القياسي الأمثل .

ويستطيع القارىء أن يثبت أن جميع المقاييس الأخرى لا تحقق شرط الانعكاس المعاملي .

تمارين الفصل السادس

(١) الجدول التالي يوضح أسعار السلع وكمياتها في سنة ٨٥ ، سنة ١٩٨٦ :

السلعة	الأسعار		الكميات	
	سنة ١٩٨٥	سنة ١٩٨٦	سنة ١٩٨٥	سنة ١٩٨٦
أ	١١٢٥	١٥٠٠	٣١	٣٧
ب	٢٣٠	٢٢٥	٥٠	٦١
جـ	٤٥٠	٣٥٠	٥٦	٤٥
د	٧٥	٩٥	١٤٣	١٥٤

باعتبار سنة ١٩٨٥ كأساس احسب :

أ - الرقم التجميعي البسيط وكذلك رقم لاسبير ورقم باشي .

ب - الرقم القياسي الأمثل (رقم فيشر).

جـ- الرقم القياسي للمناسيب البسيطة والمرجحة بأوزان سنة المقارنة باستخدام فكرة الوسط الحسابي و الوسط الهندسي .

(٢) فيما يلي متوسط الأجور الشهرية بالألف دينار في بعض أوجه النشاط الاقتصادي في شهر أكتوبر ١٩٨٢ وأكتوبر ١٩٨٥ .

السنة	الصناعات التحويلية	التجارة	الكهرباء والغاز	المناجم والمتاجر
١٩٨٢	٣١٨	٢٨٦	٤٣٢	٥٢٧
١٩٨٥	٢٥٦	٤٢٢	٣٤٨	٤٥٥

والمطلوب تركيب رقم قياسي بسيط للأجور من سنة ١٩٨٥ بالنسبة إلى سنة ١٩٨٢ كأساس .

(٣) فيما يلي أرقام لمتوسطات الأجور الشهرية بالألف دينار وعدد العمال في محافظات الكويت في سنتي ١٩٨٤، ١٩٨٥ والمطلوب تركيب رقم قياسي للأجور على أحسن صورة تراها باعتبار سنة ١٩٨٤ كأساس .

المحافظة	عدد العمال بالألف		متوسط الأجر الشهري بالألف دينار	
	٨٤	٨٥	١٩٨٤	١٩٨٥
العاصمة	١٩١	١٩٧	٣٤٢	٣٩٦
حولي	١٢٢	١٣٠	٣٣١	٣٤٠
الأحمدي	١١	١٣	٢٥١	٢٧٠
الجهراء	٥	٦	٢٥٤	٢٧٤

(٤) بافتراض أن السلع اليومية التي تستخدمها الأسر عددها سبعة . ونفترض أن أسعارها وكمياتها في السنوات ١٩٨٠ ، ١٩٨٥ كما يلي :

رقم السلعة	أسعار الوحدة لكل سلعة		الكميات المستخدمة
	١٩٨٠	١٩٨٥	سنة ١٩٨٥
(١)	٢٥	٣٠	٤٠ وحدة
(٢)	١٧	٣٥	٢٠ كجم
(٣)	٣٥	٣٧	٢ كجم
(٤)	٤٥	٥٥	٣٠ لتر
(٥)	١٧	١٨	٢٠ لتر
(٦)	١٥	٢٥	٢٥ لتر
(٧)	٧٥	٨٠	١٠ وحدات

والمطلوب حساب الرقم القياسي لتكلفة المعيشة .

(٥) احسب الرقم القياسي لمستوى المعيشة من البيانات التالية :

السلـع	الكميات التي يستهلكها الفرد في السنة	
	١٩٧٥	١٩٨٥
(١)	١٢٠	١٥٠
(٢)	٢١٠	١٢٠
(٣)	٣١٠	٣١٥
(٤)	٢٢٠	٢٠٠

(٦) احسب الرقم القياسي لتكلفة المعيشة من الجدول التالي :

مجموع السلع	الأرقام القياسية	النسبة المنفقة من الدخل على كل مجموعة من السلع
الطعـــام	٤٥٠٪	٤٠٪
الأقمشــة	٢٠٠٪	١٥٪
اسكـان	٢٥٠٪	٢٠٪
وقود واضاءة	١٥٠٪	١٠٪
سلع وخدمات متنوعة	٢٤٠٪	١٥٪

(٧) أوجد الرقم القياسي الأمثل (رقم فيشـر) للأسعـار بافتـراض ١٩٨٠ سنة الأساس باستخدام البيانات التالية :

السلعـة	الأســعـار		الكميــات	
	١٩٨٠	١٩٨٥	١٩٨٠	١٩٨٥
أ	٥	٦	١٠	١٠
ب	٨	٨	٤٠	٦٠
جـ	١٢	١٥	٢٠	١٠

(٨) فيما يلي بيان عن أسعار الجملة وكميات التعـامل لثـلاث سلع في سنتي ١٩٨٢ ، ١٩٨٦ .

السـلعـة	١٩٨٢		١٩٨٦	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
الأولى	١	١٥	٥	٢٠
الثانية	٢	٢٠	٦	٢٥
الثالثة	٣	١٥	٧	٢٠

بـاستخدام سنـة ١٩٨٢ كأسـاس أوجد الـرقم القياسي الأمثـل للكميات والرقم القياسي الأمثل للأسعار والرقم القياسي للقيمة .

الفصل السابع
الارتبــاط Correlation

مـقـدمـة : ـ

تركزت دراستنا في الفصول الخمسـة السابقـة على دراسة تـوزيع متغيـر واحد وامتدت دراستنا بعد تبويب وعرض البيـانات المتعلقـة بهذا المتغيـر إلى التعبير عن التوزيع التكراري بقيمة واحدة باستخدام أحد المقاييس الاحصـائية سواء كانت مقـاييس للنزعـة المركـزية أو مقـاييس للتشتت أو مقاييس لـدراسة درجة تماثل أو التواء توزيع المتغير موضع الدراسة .

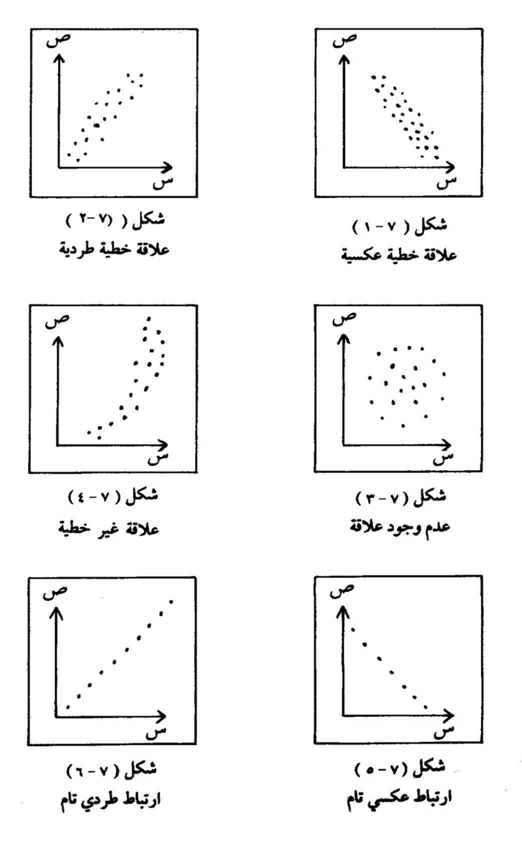
وفي هذا الفصل تمتد دراستنا لدراسة العـلاقة بين ظـاهرتين أو متغيـرين ففي حياتنا اليومية نشاهد ظواهر عديدة يوجد بينهما علاقـة أو ارتباط والارتبـاط قد يكون موجباً أو طردياً بمعنى أن هناك ترابطاً في نفس الاتجاه بين الظاهرتين فعلى سبيـل المثال ظـاهرتـا الأرباح والمبيعـات فكلمـا زادت المبيعـات زادت الأربـاح كذلـك الدخـل والانفاق فكلمـا زاد الـدخـل زاد الانفـاق على السلع والخدمات .

وأيضاً الارتباط قد يكون عكسيـاً أو سالبـاً بمعنى الترابط بين الـظاهرتين يكون في الاتجاه العكسي ومن أمثلة ذلك ظاهرتا الأرباح والمصاريف الادارية فكمـا زادت المصاريف الإداريـة قلت الأرباح وكـذلـك العـلاقـة بين الادخـار والانفاق على السلع الكمالية .

أشـكال الانتشـار :

يمكن وبمجرد النظر التعرف على نوع العـلاقة بين ظـاهرتين بـاستخدام اشكال الانتشار بالاستعانة بالتمثيل البياني لبيانات الظاهرتين موضع الدراسة .

ولتـوضيح ذلـك نفترض أن لـدينا ظـاهـرتين (س، ص) وبـالتعبيـر عن مجموعات قيم الظاهرتين بنقط نحصل على واحد من الاشكال الآتية :



شكل (٧ - ١)
علاقة خطية عكسية

شكل ((٧ -٢)
علاقة خطية طردية

شكل (٧ - ٣)
عدم وجود علاقة

شكل (٧ - ٤)
علاقة غير خطية

شكل (٧ - ٥)
ارتباط عكسي تام

شكل (٧ - ٦)
ارتباط طردي تام

ويلاحظ من الأشكال السابقة ما يلي :

١ ــ في شكل (٧ ــ ١) يتضح اتجاه الحزمة من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين أي أن المتغير (ص) يقل بزيادة المتغير (س) أي أن العلاقة عكسية أو سالبة بين المتغيرين .

٢ ــ في شكل (٧ ــ ٢) يتضح اتجاه الحزمة من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار أي أن المتغير (ص) يزيد بزيادة المتغير (س) أي أن العلاقة طردية أو موجبة بين المتغيرين .

٣ ــ في شكل (٧ ــ ٣) يتضح عدم وجود علاقة بين المتغيرين (س، ص) في هذه الحالة نجد أن معامل الارتباط = صفر .

٤ ــ في شكل (٧ ــ ٤) يتضح وجود علاقة غير خطية بين المتغيرين (س، ص).

٥ ــ في شكل (٧ ــ ٥) يتضح أن العلاقة عكسية وتامة بمعنى أن جميع أزواج القيم للمتغيرين تقع جميعها على خط واحد ومعامل الارتباط = - ١ .

٦ ــ في شكل (٧ ــ ٦) تتضح أن العلاقة طردية وتامة وفي هذه الحالة يكون معامل الارتباط = ١ .

خصائص معامل الارتباط :

يمتاز معامل الارتباط بعدة خصائص تساعد على تسهيل العمليات الجبرية الخاصة بحسابه أهمها :

١ ــ طرح مقادير ثابتة من قيم المتغيرين (س، ص) لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط وذلك عن طريق اختيار وسط فرضي لكل من الظاهرتين ولنفرض أنهما (أ ، ب) على الترتيب ونحصل على الانحرافات

البسيـطة لقيم (س) وهي $ح_س$ = س - أ والانحـرافـات البسيـطة لقيم (ص) وهي $ح_ص$ = ص - ب ومن ثم يمكن استخـدام الانـحـرافـات البسيـطة بدلاً من القيم الأصليـة في حسـاب معـامـل الارتبـاط دون أي تأثير .

٢ ـ قسمة قيم كل من المتغيرين على مقادير ثابتـة لا يؤثر على قيمـة معامـل الارتباط بينهما ، أي انه يمكن تسهيل العمليات الجبرية باستخدام فكرة الانحـرافات المختـزلة . فـإذا فرضنـا أن الشـابتين $ث_١$ ، $ث_٢$ يمكن أن تقبل القسمة عليهما $ح_س$ ، $ح_ص$ على الترتيب فنحصل على الانحرافات المختـزلة لقيم س = $ح'_س$ = $ح_س$ ÷ $ث_١$ والانحـرافات المختـزلـة لقيم ص = $ح'_ص$ = $ح_ص$ ÷ $ث_٢$

ومن ثم يمكن استخدام الانحرافات المختزلة بدلاً من القيم الأصليـة أو الانحـرافات البسيـطة في حساب معـامل الارتبـاط دون أي تأثيـر وذلك على عكس الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

٣ ـ تنحصر قيمة معامل الارتباط بين + ١ ، - ١ فإذا فـرضنا أن (ر) تـرمز لمعامل الارتباط فإنه يلزم أن يكون :

$$١ \geq ر \geq -١$$

حساب معامل الارتباط الخطي :

لحساب معامل الارتباط بين الظواهر الكمية فهناك حالتين يجب أن نميز بينهما :

أولاً : حساب معامل الارتباط للبيانات غير المبوبة :

نفرض أن المتغير الأول (س) ومفرداته هي :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . . ، $س_ن$

وسطه الحسابي $\bar{س}$ وانحرافه المعياري $ع_س$

ونفرض أن المتغير الثاني (ص) ومفرداته هي :

$$ص_١ ، ص_٢ ، ص_٣ ، \ldots\ldots ، ص_ن$$

وسطه الحسابي $\bar{ص}$ وانحرافه المعياري $ع_ص$

ولقد عرف بيرسون الارتباط بأنه متوسط حاصل ضرب انحرافي المتغيرين (س ، ص) عن وسطيهما الحسابيين بعد تخليصهما من وحدات القياس بالقسمة على الانحراف المعياري لكل منهما .

ومن ثم يمكن تعريف معامل ارتباط بيرسون على النحو التالي :

$$ر = \frac{مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{ن ع_س ع_ص} \qquad (٧ - ١)$$

ويلاحظ صعوبة استخدام هذه الصورة في الحساب ولتسهيل الحصول على معامل الارتباط نلاحظ أن :

$$مجـ (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = مجـ (س ص - س \bar{ص} - \bar{س} ص + \bar{س} \bar{ص})$$

$$= مجـ س ص - \bar{ص} مجـ س - \bar{س} مجـ ص + ن \bar{س}\bar{ص}$$

$$= مجـ س ص - ن \bar{س}\bar{ص} - ن \bar{س}\bar{ص} + ن \bar{س}\bar{ص}$$

$$= مجـ س ص - ن \bar{س}\bar{ص}$$

$$= مجـ س ص - \frac{(مجـ س) (مجـ ص)}{ن}$$

وحيث أن :

$$ع_س = \sqrt{\frac{مجـ س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن} \right)^٢}$$

$$ع_ص = \sqrt{\frac{مجـ ص^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن} \right)^٢}$$

وبالتعويض عن هذه العلاقات في المعادلة (٧ ــ ١) نحصل على الطريقة المباشرة لحساب معامل الارتباط كالآتي :

أ ــ الطريقة المباشرة :

يمكن التوصل إلى معامل الارتباط بطريقة مباشرة باستخدام القيم الأصلية للظاهرتين (س ، ص) كما يلي :

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{\sqrt{\left[ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}\right]\left[ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}\right]}} \qquad (٧ــ٢)$$

حيث (ن) تمثل عدد أزواج القيم .

ب ــ طريقة الانحرافات البسيطة :

باستخدام الخاصية الأولى نحصل على الانحرافات البسيطة $ح_{س} = س - أ$ ، $ح_{ص} = ص - ب$ ونستخدم العلاقة :

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ ح_{س}\ ح_{ص} - (مجـ\ ح_{س})\ (مجـ\ ح_{ص})}{\sqrt{\left[ن\ مجـ\ ح_{س}^{٢} - (مجـ\ ح_{س})^{٢}\right]\left[ن\ مجـ\ ح^{٢}_{ص} - (مجـ\ ح_{ص})^{٢}\right]}} \qquad (٧ــ٣)$$

جـ ــ باستخدام الانحرافات المختزلة :

باستخدام الخاصية الثانية نحصل على الانحرافات المختزلة $ح'_{س}$ ، $ح'_{ص}$ لقيم الظاهرتين ونستخدم العلاقة .

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ ح'_{س}\ ح'_{ص} - (مجـ\ ح'_{س})\ (مجـ\ ح'_{ص})}{\sqrt{\left[ن\ مجـ\ ح'^{٢}_{س} - (مجـ\ ح'_{س})^{٢}\right]\left[ن\ مجـ\ ح'^{٢}_{ص} - (مجـ\ ح'_{ص})^{٢}\right]}} \qquad (٧ــ٤)$$

أمثـلة :

مثال (٧ ــ ١) : احسب معامل الارتباط بين الظاهرتين (س ، ص) :

س	١	٥	٩	١٣	١٧
ص	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠

الحــــل :

الطريقة المباشرة :

س	ص	س ص	س^2	ص^2
١	١٠	١٠	١	١٠٠
٥	١٥	٧٥	٢٥	٢٢٥
٩	٢٠	١٨٠	٨١	٤٠٠
١٣	٢٥	٣٢٥	١٦٩	٦٢٥
١٧	٣٠	٥١٠	٢٨٩	١٠٠
٤٥	**١٠٠**	**١١٠٠**	**٥٦٥**	**٢٢٥٠**

عدد أزواج القيم (ن) = ٥

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{٥} \times \text{١١٠٠} - (\text{٤٥})(\text{١٠٠})}{\sqrt{\left[\text{٥} \times \text{٥٦٥} - (\text{٤٥})^2\right]\left[\text{٥} \times \text{٢٢٥٠} - (\text{١٠٠})^2\right]}}$$

$$ر = \frac{٥٥٠٠ - ٤٥٠٠}{\sqrt{(٢٨٢٥ - ٢٠٢٥)\ (١١٢٥٠ - ١٠٠٠٠)}}$$

$$= \frac{١٠٠٠}{\sqrt{٨٠٠ \times ١٢٥٠}} = \frac{١٠٠٠}{\sqrt{١٠٠٠٠٠٠}} = \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠}$$

∴ ر = ١ أي أن الارتباط طردي وتام

حــل آخــر :

باستخدام الانحرافات البسيطة :

في هذه الحالـة نبحث عن وسط فرضي لكـل من قيم (س، ص). وفي هذه الحالة يراعى أن يكون الوسط الفرضي قريباً من متوسط القيم وذلـك حتى يكون مجموع الانحرافات عنه أقل ما يمكن وذلك لتسهيـل العمليات الجبـرية وفي هذا المثال نأخذ الوسط الفرضي لقيم س = ٩ والوسط الفرضي لقيم ص = ٢٠

س	ص	$ح_س$ = س − ٩	$ح_ص$ = ص − ٢٠	$ح_س ح_ص$	$ح^٢_س$	$ح^٢_ص$
١	١٠	− ٨	− ١٠	٨٠	٦٤	١٠٠
٥	١٥	− ٤	− ٥	٢٠	١٦	٢٥
٩	٢٠	صفر	صفر	صفر	ظفر	صفر
١٣	٢٥	٤	٥	٢٠	١٦	٢٥
١٧	٣٠	٨	١٠	٨٠	٦٤	١٠٠
		صفر	صفر	٢٠٠	١٦٠	٢٥٠

$$ر = \frac{ن\ مجـ ح_س ح_ص - (مجـ ح_س)(مجـ ح_ص)}{\sqrt{\left[ن\ مجـ ح^2_س - (مجـ ح_س)^2\right]\left[ن\ مجـ ح^2_ص - (مجـ ح_ص)^2\right]}}$$

$$= \frac{٥ \times ٢٠٠ - صفر}{\sqrt{[٥ \times ١٦٠ - صفر][٥ \times ٢٥٠ - صفر]}} = \frac{١٠٠٠}{\sqrt{٨٠٠ \times ١٢٥٠}}$$

$$ر = \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠} = ١$$

وهي نفس النتيجة السابقة

ملاحظة :

يستطيع القارىء أن يصل إلى نفس النتيجة باستخدام طريقة الانحرافات المختزلة في هذا المثال حيث يمكن الحصول على الانحرافات المختزلة لقيم (س) بقسمة الانحرافات البسيطة لها على ٤ وكذلك الحصول على الانحرافات المختزلة لقيم (ص) بقسمة الانحرافات البسيطة لها على ٥ .

مثال (٧ ـ ٢) :

احسب معامل الارتباط بين الظاهرتين (س، ص) :

س	٣	٥	٧	٩	١١
ص	٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠

الحـــل :

س	ص	س ص	س^٢	ص^٢
٣	٣٠	٩٠	٩	٩٠٠
٥	٢٥	١٢٥	٢٥	٦٢٥
٧	٢٠	١٤٠	٤٩	٤٠٠
٩	١٥	١٣٥	٨١	٢٢٥
١١	١٠	١١٠	١٢١	١٠٠
٣٥	١٠٠	٦٠٠	٢٨٥	٢٢٥٠

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$= \frac{٥ \times ٦٠٠ - (٣٥)(١٠٠)}{\sqrt{[٥ \times ٢٨٥ - (٣٥)^{٢}][٥ \times ٢٢٥٠ - (١٠٠)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٣٠٠٠ - ٣٥٠٠}{\sqrt{(١٤٢٥ - ١٢٢٥)(١١٢٥٠ - ١٠٠٠٠)}} = \frac{- ٥٠٠}{\sqrt{٢٠٠ \times ١٢٥٠}}$$

$$= \frac{- ٥٠٠}{\sqrt{٢٥٠٠٠٠}}$$

$$= \frac{- ٥٠٠}{٥٠٠} \qquad \therefore \text{ر} = -١$$

∴ الارتباط عكس وتام .

مثال (٧ ـ ٣) :

احسب معامل الارتباط بين عمر الزوج (س) وعمر الزوجة (ص)

س	٣٣	٢٧	٢٨	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٣	٣٥	٣٦
ص	١٨	٢٠	٢٢	٢٧	٢١	٢٩	٢٧	٢٩	٢٨	٢٩

الحـــل :

باستخدام طريقة الانحرافات البسيطة بافتراض :

وسط فرضي لقيم س = ٣٣

وسط فرضي لقيم ص = ٢٧

س	ص	$ح_س$ = س - ٣٣	$ح_ص$ = ص - ٢٧	$ح_س ح_ص$	$ح^2_ص$	$ح^2_س$
٣٣	١٨	صفر	- ٩	صفر	٨١	صفر
٢٧	٢٠	- ٦	- ٧	٤٢	٤٩	٣٦
٢٨	٢٢	- ٥	- ٥	٢٥	٢٥	٢٥
٢٨	٢٧	- ٥	صفر	صفر	صفر	٢٥
٢٩	٢١	- ٤	- ٦	٢٤	٣٦	١٦
٣٠	٢٩	- ٣	٢	- ٦	٤	٩
٣١	٢٧	- ٢	صفر	صفر	صفر	٤
٣٣	٢٩	صفر	٢	صفر	٤	صفر
٣٥	٢٨	٢	١	٢	١	٤
٣٦	٢٩	٣	٢	٦	٤	٩
		- ٢٠	- ٢٠	٩٣	٢٠٤	١٢٨

ن = عدد القيم = ١٠

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ}\, ح_{س}\, ح_{ص} - (\text{مجـ}\, ح_{س})\,(\text{مجـ}\, ح_{ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ}\, ح^{٢}_{س} - (\text{مجـ}\, ح_{س})^{٢}]\,[\text{ن مجـ}\, ح^{٢}_{ص} - (\text{مجـ}\, ح_{ص})^{٢}]}}$$

$$= \frac{١٠ \times ٩٣ - (-٢٠)\,(-٢٠)}{\sqrt{[١٠ \times ١٢٨ - (٤٠٠)]\,[١٠ \times ٢٠٤ - (٤٠٠)]}}$$

$$= \frac{٩٣٠ - ٤٠٠}{\sqrt{(١٢٨٠ - ٤٠٠)\,(٢٠٤٠ - ٤٠٠)}}$$

$$= \frac{٥٣٠}{\sqrt{٨٨٠ \times ١٦٤٠}}$$

$$= \frac{٥٣٠}{\sqrt{١٤٤٣٢٠٠}} = \frac{٥٣٠}{١٢٠١,٣٣} = ,٤٤$$

∴ الارتباط طردي وضعيف.

ارتباط الرتب Rank Correlation

« معامل ارتباط سبيرمان »

تمتاز هذه الطريقة عن طريقة بيرسون بـالسهولـة في الحساب بـالإضافـة إلى إمكانية استخدامها في حالة الظواهر الوصفية . وتعتمد هذه الـطريقة على الترتيب التصاعدي أو التنازلي لقيم الظاهرتين وتتلخص خـطوات هذه الـطريقة فيما يلي :

١ ــ نضع القيم الخاصة بكل من الظاهرتين (س ، ص) في العمودين الأول والثاني .

٢ ــ نوجد قيم رتب الظاهرتين (س، ص) امـا ترتيبـاً تصاعـدياً أو تنـازلياً في عمودين ثالث ورابع .

وتعتمـد هذه الـطريقة على أن القيم المتسـاوية يلزم أن تكـون لها رتب متساوية ، وعليه إذا تكررت قيمة من القيم أكثر من مـرة يجب أن تعطى الرتبة التي تعادل متوسط ما كان يمكن أن تكون عليه هذه الرتب .

٣ ــ نحسب الفروق بين ترتيبي كل قيمتين متناظـرتين للظاهرتين (س، ص) في عمود خامس ويرمز له بالرمز (ف) أي أن :

ف = رتب س – رتب ص

٤ ــ نحسب مربعات هذه الفروق ($ف^٢$) في عمود سادس .

٥ ــ ثم نطبق العلاقة التالية لحساب معامل ارتباط الرتب .

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)} \qquad (٧ ــ ٥)$$

مـلاحـظـة :

يمكن التوصل إلى العلاقة في (٧ ــ ٥) من العـلاقة الخـاصة بمعـامل

ارتباط بيرسون في (٧ ــ ١) إذا افترضنا أن كلا من الظاهرتين (س ، ص) تأخذ القيم التالية بترتيب معيّن .

١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

ومن ثم يصبح $\bar{س} = \bar{ص} = \frac{ن + ١}{٢}$

وكذلك $ع^٢_س = ع^٢_ص = \frac{ن^٢ - ١}{١٢}$

وبافتراض أن ف = س - ص فإن مجموع مربعات الفروق

$مجـ ف^٢ = مجـ (س - ص)^٢$

وحيث أن $\bar{س} = \bar{ص}$ فإن بسط العلاقة (٧ ــ ١) يؤول إلى :

$مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص}) = \frac{ن (ن^٢-١)}{١٢} - \frac{مجـ ف^٢}{٢}$

وبالتعويض في (٧ ــ ١) يمكن أن نحصل على العلاقة (٧ ــ ٥) .

مثـال (٧ - ٤) :

احسب معامل ارتباط الرتب لقيم الظاهرتين (س، ص) في مثال (٦ ــ ١)

الحـل :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^٢$
١	١٠	١	١	٠	٠
٥	١٥	٢	٢	٠	٠
٩	٢٠	٣	٣	٠	٠
١٣	٢٥	٤	٤	٠	٠
١٧	٣٠	٥	٥	٠	٠
					صفر

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^٢}{ن (ن^٢ - ١)} = ١ - صفر = ١$$

∴ الارتباط طردي وتام

كذلك يستطيع القارىء بسهولة أن يثبت أن معامل ارتباط الرتب في مثال (٦ ــ ٢) هـو (ر = - ١) وهي نفس النتـائج التي حصلنـا عليهـا بـطريقــة بيرسون .

مثال (٧ ــ ٥) :

احسب معامل سبيرمان لقيم الظاهرتين (س، ص) في مثال (٧ــ٣).

الحـــل :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^٢
٣٣	١٨	٧,٥	١	٦,٥	٤٢,٥
٢٧	٢٠	١	٢	١-	١
٢٨	٢٢	٢,٥	٤	١,٥ -	٢,٢٥
٢٨	٢٧	٢,٥	٥,٥	٣-	٩
٢٩	٢١	٤	٣	١	١
٣٠	٢٩	٥	٩	٤ -	١٦
٣١	٢٧	٦	٥,٥	,٥	,٢٥
٣٣	٢٩	٧,٥	٩	١,٥ -	٢,٢٥
٣٥	٢٨	٩	٧	٢	٤
٣٦	٢٩	١٠	٩	١	١
					٧٩,٠٠

ن = عدد أزواج القيم = ١٠

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٧٩}{١٠ \times ٩٩} = ١ - \frac{٤٧٤}{٩٩٠}$$

$$= ٫٥٢$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة أنه لا يلزم أن تتساوى طريقتا بيرسون وسبيرمان لنفس البيانات ولكننا حصلنا على نفس النتيجة في حالة الارتباط التام سواء كان عكسياً أو طردياً .

وفي المثال التالي نوضح امكانية استخدام طريقة سبيرمان في حالة الظواهر الوصفية .

مثال (٧ ــ ٦) :

احسب معامل ارتباط الرتب لتقديرات عشرة من الطلبة في مادتي المحاسبة (س) والإدارة العامة (ص) .

س	جيد	مقبول	جيد جداً	راسب	جيد	مقبول	ممتاز	مقبول	راسب	مقبول
ص	راسب	مقبول	ممتاز	مقبول	جيد	جيد جداً	جيد	راسب	جيد	جيد جداً

الحــل :

نقوم بإيجاد رتب التقديرات تنازلياً .

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{2}
جيد	راسب	٣,٥	٩,٥	- ٦	٣٦
مقبول	مقبول	٦,٥	٧,٥	- ١	١
جيد جداً	ممتاز	٢	١	١	١
راسب	مقبول	٩,٥	٧,٥	٢	٤
جيد	جيد	٣,٥	٥	-١,٥	٢,٢٥
مقبول	جيد جداً	٦,٥	٢,٥	٤	١٦
ممتاز	جيد	١	٥	- ٤	١٦
مقبول	راسب	٦,٥	٩,٥	- ٣	٩
راسب	جيد	٩,٥	٥	٤,٥	٢٠,٢٥
مقبول	جيد جداً	٦,٥	٢,٥	٤,٥	١٦
					١٢١,٥

ن = ١٠

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن^{٣} - ن}$$

$$= ١ - \frac{١٢١,٥ \times ٦}{١٠٠٠ - ١٠}$$

$$= ١ - \frac{٧٢٩}{٩٩٠} = ١ - ,٧٣٦$$

$$= ,٢٦٤$$

∴ الارتباط طردي وضعيف جداً بين تقديرات الطلبة في المادتين .

ثانياً : معامل الارتباط الخطي للبيانات المبوبة :

لحساب معامل الارتباط من الجدول التكراري المزدوج والذي سبق تكوينه من جدول (٢ ــ ٢٠) نستخدم إحدى الطرق الآتية :

أ ــ الطريقة المباشرة :

$$ر = \frac{\text{مجـ ك مجـ س ص ك} - (\text{مجـ س ك})(\text{مجـ ص ك})}{\sqrt{[\text{مجـ ك مجـ س}^{٢}\text{ ك} - (\text{مجـ س ك})^{٢}][\text{مجـ ك مجـ ص}^{٢}\text{ ك} - (\text{مجـ ص ك})^{٢}]}}$$

(٧ ــ ٦)

حيث : س ترمز إلى مراكز فئات المتغير س

ص ترمز إلى مراكز فئات المتغير ص

مجـ ك ترمز إلى مجموع التكرارات

ويمكن التوصل إلى جميع المجاهيل اللازمة لحساب معامل الارتباط باستخدام العلاقة (٧ ــ ٦) عن طريق أحد الأسلوبين التاليين :

١ ــ الأسلوب الأول :

ويتمثل في استخدام الجداول الثلاثة التالية :

ــ الجدول الأول الذي يمثل التوزيع الهامشي للمتغير (س) ونحسب فيه مجـ س ك ، مجـ $س^{٢}$ ك .

ــ الجدول الثاني الذي يمثل التوزيع الهامشي للمتغير (ص) ونحسب فيه مجـ ص ك ، مجـ $ص^{٢}$ ك .

ــ الجدول الثالث وهو يمثل الجدول المزدوج الأصلي وباستخدام مراكز فئات (س ، ص) مع التكرارات التفصيلية بالجدول نحسب مجـ س ص ك .

١ ـ **الأسلوب الثاني** : ويتضمن جدولاً واحداً يشمل الجداول الثلاثة السابقة .

ب ـ طريقة الانحرافات البسيطة :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك مجـ ح}_{\text{س}}\text{ح}_{\text{ص}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}_{\text{س}}\text{ ك})(\text{مجـ ح}_{\text{ص}}\text{ ك})}{\sqrt{[\text{مجـ ك مجـ ح}^{2}_{\text{س}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}_{\text{س}}\text{ ك})^{2}]\;[\text{مجـ ك مجـ ح}^{2}_{\text{ص}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}_{\text{ص}}\text{ ك})^{2}]}}$$

(٧ ـ ٧)

حيث :

$\text{ح}_{\text{س}} = \text{س} - \text{أ}$ هي الانحرافات البسيطة للمتغير (س)

$\text{ح}_{\text{ص}} = \text{ص} - \text{ب}$ هي الانحرافات البسيطة للمتغير (ص)

أ ، ب مقادير ثابتة

جـ ـ طريقة الانحرافات المختصرة :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك مجـ ح}'_{\text{س}}\text{ح}'_{\text{ص}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}'_{\text{س}}\text{ ك})(\text{مجـ ح}'_{\text{ص}}\text{ ك})}{\sqrt{[\text{مجـ ك مجـ ح}'^{2}_{\text{س}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}'_{\text{س}}\text{ ك})^{2}][\text{مجـ ك مجـ ح}'^{2}_{\text{ص}}\text{ ك} - (\text{مجـ ح}'_{\text{ص}}\text{ ك})^{2}]}}$$

(٨ ـ ٧)

حيث :

$\text{ح}'_{\text{س}} = \text{ح}_{\text{س}} \div \text{ث}_{1}$ هي الانحرافات المختصرة للمتغير (س)

$\text{ح}'_{\text{ص}} = \text{ح}_{\text{ص}} \div \text{ث}_{2}$ هي الانحرافات المختصرة للمتغير (ص)

ويفضل استخدام هذه الطريقة في حالة تساوي فئات التوزيعات الهامشية للمتغيرين (س، ص).

مثال (٧ ـ ٧) :

احسب معامل الارتباط الخطي للجدول المزدوج الذي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص).

ص \ س	٢٠-	٢٢-	٢٤-	٢٦-	٢٨-٣٠	المجموع
١٠ -	١٥	١٣	٨			٣٦
١٥ -		٨	٢٠	٩		٣٧
٢٠ - ٢٥			٥	١٢	١٠	٢٧
المجموع	١٥	٢١	٣٣	٢١	١٠	١٠٠

الحـــل : ١ ــ التوزيع الهامشي للمتغير (س)

فئـات س	ك	مركز الفئة س	$ح_س$ = س - ٢٥	$ح'_س = \frac{ح_س}{٢}$	$ح'_س$ ك	$ح'^{٢}_س$ ك
٢٠ -	١٥	٢١	٤ -	٢ -	٣٠ -	٦٠
٢٢ -	٢١	٢٣	٢ -	١ -	٢١ -	٢١
٢٤ -	٣٣	٢٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٢٦ -	٢١	٢٧	٢	١	٢١	٢١
٢٨ - ٣٠	١٠	٢٩	٤	٢	٢٠	٤٠
المجموع	١٠٠				١٠ -	١٤٢

٢ ــ التوزيع الهامشي للمتغير (ص)

فئـات ص	ك	ص	$ح_ص$ = ص - ١٧,٥	$ح'_ص = \frac{ح_ص}{٥}$	$ح'_ص$ ك	$ح'^{٢}_ص$ ك
١٠ -	٣٦	١٢,٥	٥ -	١ -	٣٦ -	٣٦
١٥ -	٣٧	١٧,٥	صفر	صفر	صفر	صفر
٢٠ - ٢٥	٢٧	٢٢,٥	٥	١	٢٧	٢٧
المجموع	١٠٠				٩ -	٦٣

ح/ص	ص \ س	٢٠ -	٢٢ -	٢٤ -	٢٦ -	٢٨-٣٠	المجموع
ح/س		٢-	١-	صفر	١	٢	
١-	١٠ -	١٥ [٣٠]	١٣ [١٣]	٨ [صفر]			٣٦ [٤٣]
صفر	١٥ -		٨ [صفر]	٢٠ [صفر]	٩ [صفر]	[صفر]	٣٧ [صفر]
١	١٥ - ٢٠			٥ [صفر]	١٢ [١٢]	١٠ [٢٠]	٢٧ [٣٢]
	المجموع	١٥ [٣٠]	٢١ [١٣]	٣٣ [صفر]	٢١ [١٢]	١٠ [٢٠]	١٠٠ [٧٥]

$$ر = \frac{\text{مجـ ك مجـ ح}/_{س}\,\text{ح}/_{ص}\,\text{ك} - (\text{مجـ ح}/_{س}\text{ك})(\text{مجـ ح}/_{ص}\text{ك})}{\sqrt{[\text{مجـ ك مجـ ح}/^{2}_{س}\text{ك} - (\text{مجـ ح}/_{س}\text{ك})^{2}]\,[\text{مجـ ك مجـ ح}/^{2}_{ص}\text{ك} - (\text{مجـ ح}/_{ص}\text{ك})^{2}]}}$$

$$= \frac{١٠٠ \times ٧٥ + (-١٠)(-٩)}{\sqrt{[١٠٠ \times ١٤٢ - ١٠٠]\,[١٠٠ \times ٦٣ - ٨١]}}$$

$$= \frac{٧٥٠٠ - ٩٠}{\sqrt{١٤١٠٠ \times ٦٢١٩}}$$

$$= \frac{٧٤١٠}{٩٣٦٤,١٨}$$

$ر = ,٧٩$

∴ الارتباط طردي وقوي بين س ، ص

حـــل آخـــر :

يمكن استخدام الأسلوب التالي وذلك بوضع الجداول الثلاث السابقة في جدول واحد كما يظهر في الشكل التالي :

حساب معامل الارتباط من الجدول المزدوج

س / ص	٢٠-	٢٢-	٢٤-	٢٦-	٢٨-٣٠	المجموع	ص	ح/س	ح/ص ك	ح²/ص ك	ح/س ك	ح/س ح/
١٠-	١٥	١٣	٨			٣٦	١٢,٥	١-	٣٦-	٣٦	٤٣-	٣
١٥-		٨	٢٠	٩		٣٧	١٧,٥	٠	٠	٠	١	٠
٢٠-٢٥			٥	١٢	١٠	٢٧	٢٢,٥	١	٢٧	٢٧	٣٢	٢
المجموع	١٥	٢١	٣٣	٢١	١٠	١٠٠			٩-	٦٣	١٠-	٥
س	٢١	٢٣	٢٥	٢٧	٢٩							
ح/س	٢-	١-	٠	١	٢							
ح/س ك	٣٠-	٢١-	٠	٢١	٢٠	١٠-						
ح²/س ك	٦٠	٢١	٠	٢١	٤٠	١٤٢						
ح/ص ك	١٥-	١٣-	٣-	١٢	١٠	٩-						
ح/س ح/ص ك	٣٠	١٣	٠	١٢	٢٠	٧٥						

وبالتعويض كما سبق نحصل على :

ر = ,٧٩

الارتباط بين الظواهر الوصفية

لاحظنا مما سبق أنه يمكن استخدام معامل ارتباط الرتب في حالة البيانات الوصفية غير المبوبة . أما إذا كان لدينا جداول مبوبة لظاهرتين وصفيتين أو جداول مبوبة لظاهرتين احداهما وصفية والأخرى كمية فإنه يمكننا دراسة الارتباط فيما بينها باستخدام معاملات خاصة لها نفس خصائص معامل الارتباط في حالة الظواهر الكمية مثل معامل التوافق ومعامل الاقتران .

أ ــ معامل التوافق Contingency Coefficient :

إذا كان لدينا صفتان وكل صفة مقسمة إلى عدة أقسام ولقياس العلاقة بين هاتين الصفتين نسحب عينة مكونة من عدد (ن) من المفردات ونسجل مشاهداتنا في الجدول المزدوج التالي بافتراض أن الصفة الأولى تنقسم إلى عدد (ل) من الأقسام والصفة الثانية تنقسم إلى عدد (م) من الأقسام ، ويسمى بجدول التوافق Contingency Table .

جدول توافق لصفتين

الصفة الثانية ب / الصفة الأولى أ	ب١	ب٢	....	بم	المجموع
أ١	ك١١	ك٢١	....	ك١م	ن١.
أ٢	ك١٢	ك٢٢	....	ك٢م	ن٢.
⋮					⋮
أل	كل١	كل٢		كلم	نل.
المجموع	ن.١	ن.٢	....	ن.م	ن

حيث : $ن_{.1}$، $ن_{.2}$، . . . ، $ن_{.م}$ هي المجاميع الهامشية للصفة (ب)

$ن_{1.}$ ، $ن_{2.}$ ، . . . . ، $ن_{ل.}$ هي المجاميع الهامشية للصفة (أ)

وهناك مقاييس مختلفة لمعامل التوافق سوف نستخدم منها الصورة التالية :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{كا^2}{كا^2 + ن}} \qquad (٧ - ٩)$$

حيث :

ن حجم العينة

$كا^2$ متغير احصائي له توزيع يعرف باسم $كا^2$ Chi-Square (مربع كاى) ويمكن حسابها كالآتي :

$$كا^2 = \frac{مجـ (ك - ت)^2}{ت} ،$$

حيث : ك التكرار المشترك المشاهد في كل خلية

ت التكرار المتوقع لكل خلية ويحسب من العلاقة

$$ت = \frac{ن_{.ر} \times ن_{و.}}{ن} \quad \text{لجميع قيم} \quad ر = ١ ، ٢ ، . . . ، م \quad و = ١ ، ٢ ، . . . ، ل$$

والفكرة الأساسية في هذا المعامل هي أنه كلما بعد الفرق بين التكرارات المشاهدة (ك) والمتوقعة (ت) نتيجة لوجود علاقة بين الظاهرتين كلما كبرت قيمة $كا^2$ وبالتالي تزيد قيمة معامل التوافق . وكلما كان الفرق محدوداً بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة نتيجة لضعف اعتماد أي من الظاهرتين على الأخرى كلما قلت قيمة $كا^2$ وبالتالي تقل قيمة معامل التوافق. وتكون الظاهرتان مستقلتين تماماً عندما تكون $كا^2$ = صفر .

مثال (٧ ــ ٨) :

الجدول التالي يلخص دراسة على ٥٠ مفردة لقياس العلاقة بين مستوى التعليم والتدخين . والمطلوب حساب معامل التوافق .

تعليم / تدخين	جامعي	متوسط	غير متعلم	المجموع
نعم	١٠	٥	٥	٢٠
لا	١٣	٧	١٠	٣٠
المجموع	٢٣	١٢	١٥	٥٠

الحــــل :

ك	ت	$كا^2 = \frac{(ك - ت)^2}{ت}$
١٠	٩,٢	,٠٦٩
٥	٤,٨	,٠٠٨
٥	٢,٠	٤,٥٠٠
١٣	١٣,٨	,٠٤٦
٧	٧,٢	,٠٠٥
١٠	٦,٠	٢,٦٦٧
		٧,٢٩٥

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{كا^2}{كا^2 + ن}} = \sqrt{\frac{٧,٢٩٥}{٥٧,٢٩٥}}$$

$$= ,٣٥٧$$

∴ الارتباط ضعيف بين التعليم والتدخين .

ملاحظات :

١ ـ معامل التوافق دائماً كمية موجبة لأن $كا^2 \geqslant$ صفر . ومن ثم فهو يعطي مقياساً لقوة العلاقة بين الظاهرتين ولا يعطي مؤشراً على نوع العلاقة بينهما سواء كانت طردية أو عكسية .

٢ ـ معامل التوافق قيمة محصورة بين الصفر وقيمة عظمى أقل من الواحد الصحيح قيمتها تعتمد على حجم الجدول المزدوج ، فإذا كان الجدول مكوناً من (جـ) صف وكذلك (جـ) عمود فإن أكبر قيمة ممكنة لمعامل التوافق هي :

$$ق = \sqrt{\frac{جـ - ١}{جـ}}$$

وخلاف ذلك فإن أكبر قيمة ممكنة لمعامل التوافق تساوي :

$$ق = \sqrt{\frac{ن (ك - ١)}{ن + ن (ك - ١)}}$$

حيث (ن) هو العدد الكلي للتكرارات في الجدول ، ك هي إما عدد الصفوف أو عدد الأعمدة أيهما أصغر .

٣ ـ لمعرفة قوة الارتباط ينسب معامل التوافق المحسوب إلى (ق) .

٤ ـ يستخدم هذا المقياس كثيراً في الدراسات الاجتماعية والتربوية والنفسية وكذلك الدراسات التي تقاس متغيراتها وصفياً .

ب ـ معامل الاقتران :

إذا كان المطلوب هو دراسة الارتباط بين ظاهرتين وصفيتين في حالة كون التقسيم الرأسي والأفقي لهما هو تقسيم ثنائي (أي جدول ٢ × ٢) أي حالة خاصة من جدول التوافق السابق ، كما يلخصه الجدول التالي :

	الظاهرة ص	
الظاهرة	أ	جـ
س	ب	د

ويمكن حساب معامل الاقتران أو ما يسمى معامل Yule باستخدام العلاقة :

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{أ} \times \text{د} + \text{ب} \times \text{جـ}} \qquad (٧ ــ ١٠)$$

مثال (٧ ــ ٩) :

الجدول التالي يلخص دراسة لقياس العلاقة بين التطعيم ضد مرض الجدري والإصابة بهذا المرض . والمطلوب حساب معامل الاقتران .

الحـــل :

التطعيم / الاصابة	لا	نعم
لا	٣٠٠ (أ)	٣٠٠ (جـ)
نعم	٣٥٠ (ب)	٩٠٠ (د)

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{أ} \times \text{د} + \text{ب} \times \text{جـ}}$$

$$= \frac{٣٠٠ \times ٩٠٠ - ٣٠٠ \times ٣٥٠}{٣٠٠ \times ٩٠٠ + ٣٠٠ \times ٣٥٠} = ,٤٤$$

وهذا يعني أن العلاقة بين التطعيم ضد مرض الجدري والاصابة به علاقة طردية وضعيفة .

معامل الارتباط المتعدد

سبق وأن اقتصرت دراستنا للارتباط على ظاهرتين فقط ولكن في الحياة العملية كثيراً ما توجد علاقة بين أكثر من ظاهرتين ونرغب في قياس الارتباط بينهم كما هو الحال في كثير من المشاكل الاقتصادية والنفسية والاجتماعية فمثلاً قيمة المبيعات من سلعة معيّنة يتوقف على أسلوب الاعلان عنها وعلى قدرة وأسلوب البائع وطريقة عرضها وكذلك كمية الانتاج من منتج معيّن يتوقف على مهارة العاملين ومستوى تدريبهم وعلى المستوى التكنولوجي المستخدم ورأس المال المستثمر والوقت المتاح .

وسوف نقتصر في تحليلنا على ثلاث ظواهر (متغيرات) هي : ($س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$) ، بافتراض أن هناك علاقة خطية بينها بمعنى أنه يمكن حساب معامل الارتباط البسيط بين كل زوج من هذه الظواهر أي أن : ($ر_{٢١}$ ، $ر_{٣١}$ ، $ر_{٣٢}$) هي معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين الظواهر ($س_{١}$ ، $س_{٢}$) ، ($س_{١}$ ، $س_{٣}$) ، ($س_{٢}$ ، $س_{٣}$) على الترتيب . ومن ثم يمكن حساب معامل الارتباط المتعدد (الكلي) بين الظاهرة ($س_{١}$) والظاهرتين ($س_{٢}$ ، $س_{٣}$) وهو الجذر التربيعي الموجب للمقدار .

$$ر^{٢}_{١(٣٢)} = \frac{ر^{٢}_{٢١} + ر^{٢}_{٣١} - ٢\, ر_{٢١}\, ر_{٣١}\, ر_{٣٢}}{١ - ر^{٢}_{٣٢}} \qquad (٧ - ١١)$$

ملاحظات :

١ ـ معامل الارتباط المتعدد موجب القيمة دائماً (١ ≥ $ر_{١(٣٢)}$ ≥ صفر) .

٢ ـ معامل الارتباط المتعدد يكون أكبر دائماً من جميع معاملات الارتباط الجزئية بين أزواج الظواهر الداخلة في حسابه نظراً لأن تقدير الارتباط بين الظواهر الثلاث يكون أفضل باستخدام معلومات أكثر عمّا هو الحال عند تقدير الارتباط بين أزواج الظواهر.

٣ ـ يمكن الحصول على معامل الارتباط المتعدد بمعلومية الخطأ المعياري للتقدير كما سيتضح في الفصل الثامن .

معامل الارتباط الجزئي

Partial Correlation Coefficient

إذا كنا نهدف إلى دراسة الارتباط في هذه الحالة بين ظاهرتين فقط مع استبعاد أثر الظاهرة الثالثة نستخدم ما يسمى معامل الارتباط الجزئي . فمثلاً إذا أردنا قياس الارتباط بين الظاهرتين ($\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$) مع تثبيت الظاهرة ($\text{س}_{٣}$) نحسب معامل الارتباط الجزئي ($\text{ر}_{٢١٫٣}$) من العلاقة :

$$\text{ر}_{٢١٫٣} = \frac{\text{ر}_{٢١} - \text{ر}_{٣١}\,\text{ر}_{٣٢}}{\sqrt{(١ - \text{ر}_{٣١}^{٢})\,(١ - \text{ر}_{٣٢}^{٢})}} \qquad (٧ - ١٢)$$

وهكذا إذا أردنا دراسة العلاقة بين الظاهرتين ($\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٣}$) مع تثبيت الظاهرة ($\text{س}_{٢}$) نحسب معامل الارتباط الجزئي ($\text{ر}_{٣١٫٢}$) من العلاقة :

$$\text{ر}_{٣١٫٢} = \frac{\text{ر}_{٣١} - \text{ر}_{٢١}\,\text{ر}_{٣٢}}{\sqrt{(١ - \text{ر}_{٢١}^{٢})\,(١ - \text{ر}_{٣٢}^{٢})}} \qquad (٧ - ١٣)$$

وبصورة عامة فإن معامل الارتباط الجزئي يدرس العلاقة بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة مع ثبات المتغيرات المستقلة الأخرى . ويجب الإشارة هنا إلى صعوبة استخدام هذا المقياس في بعض الحالات التي يصعب فيها تثبيت بعض المتغيرات المستقلة نظراً لطبيعة التشابك فيما بينها .

مثال (٧ ــ ١٠) :

من البيانات التالية عن المتغيرات $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٣}$

$\text{س}_{١}$	١	٢	٣	٤	٥
$\text{س}_{٢}$	٢	٣	٣	٥	٧
$\text{س}_{٣}$	٢	٥	٧	٨	٨

أوجـــد :

١ ـــ معامل ارتباط المتعدد بين $س_{١}$ وكل من $س_{٢}$، $س_{٣}$.

٢ ـــ معامل الارتباط الجزئي بين $س_{١}$، $س_{٢}$ مع تثبيت $س_{٣}$.

الحـــل :

$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{١}^{٢}$	$س_{٢}^{٢}$	$س_{٣}^{٢}$	$س_{١}\,س_{٢}$	$س_{١}\,س_{٣}$	$س_{٢}\,س_{٣}$
١	٢	٢	١	٤	٤	٢	٢	٤
٢	٣	٥	٤	٩	٢٥	٦	١٠	١٥
٣	٣	٧	٩	٩	٤٩	٩	٢١	٢١
٤	٥	٨	١٦	٢٥	٦٤	٢٠	٣٢	٤٠
٥	٧	٨	٢٥	٤٩	٦٤	٣٥	٤٠	٥٦
١٥	٢٠	٣٠	٥٥	٩٦	٢٠٦	٧٢	١٠٥	١٣٦

بافتراض ($ر_{٢١}$ ، $ر_{٣١}$ ، $ر_{٣٢}$) هي معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين المتغيرات ($س_{١}$ ، $س_{٢}$) ، ($س_{١}$ ، $س_{٣}$) ، ($س_{٢}$، $س_{٣}$) على الترتيب .

$$ر_{٢١} = \frac{ن\ مجـ\ س_{١}\ س_{٢} - (مجـ\ س_{١})\ (مجـ\ س_{٢})}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س_{١}^{٢} - (مجـ\ س_{١})^{٢}]\ [ن\ مجـ\ س_{٢}^{٢} - (مجـ\ س_{٢})^{٢}]}}$$

$$= \frac{٥\ (٧٢) - (١٥)\ (٢٠)}{\sqrt{(٥ \times ٥٥ - ٢٢٥)\ (٥ \times ٩٦ - ٤٠٠)}} = ,٩٥$$

$$ر_{٣١} = \frac{ن\ مجـ\ س_{١}\ س_{٣} - (مجـ\ س_{١})\ (مجـ\ س_{٣})}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س_{١}^{٢} - (مجـ\ س_{١})^{٢}]\ [ن\ مجـ\ س_{٣}^{٢} - (مجـ\ س_{٣})^{٢}]}}$$

$$= \frac{٥ \times ١٠٥ - ١٥ \times ٣٠}{\sqrt{٥٠ [٥ \times ٢٠٦ - ٩٠٠]}} = ,٩٣$$

$$ر_{٣٢} = \frac{ن \text{ مجـ } س_٢ س_٣ - (\text{مجـ } س_٢)(\text{مجـ } س_٣)}{\sqrt{[ن \text{ مجـ } س_٢^٢ - (\text{مجـ } س_٢)^٢][ن \text{ مجـ } س_٣^٢ - (\text{مجـ } س_٣)^٢]}}$$

$$= \frac{٥ \times ١٣٦ - ٢٠ \times ٣٠}{\sqrt{٨٠ \times ١٣٠}} = ,٧٨$$

١ ــ معامل الارتباط المتعدد بين ($س_١$) وكل من ($س_٢$ ، $س_٣$)

$$ر^٢_{١(٣٢)} = \frac{ر^٢_{٢١} - ر^٢_{٣١} - ٢ ر_{٢١} ر_{٣١} ر_{٣٢}}{١ - ر^٢_{٣٢}}$$

$$ر^٢_{١(٣٢)} = \frac{(,٩٥)^٢ - (,٩٣)^٢ - ٢ (,٩٥) (,٩٣) (,٧٨)}{١ - (,٧٨)^٢}$$

$$= ,٩٩$$

∴ معامل الارتباط المتعدد = $\sqrt{,٩٩} = ,٩٩$

أي أن الارتباط بين المتغيرات الثلاثة ($س_١$، $س_٢$، $س_٣$) قوي جداً .

٢ ــ معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين ($س_١$، $س_٢$) مع تثبيت ($س_٣$) .

$$ر_{٢١ \cdot ٣} = \frac{ر_{٢١} - ر_{٣١} ر_{٣٢}}{\sqrt{(١ - ر^٢_{٣١})(١ - ر^٢_{٣٢})}}$$

$$= \frac{,٩٥ - (,٩٣)(,٧٨)}{\sqrt{[١ - (,٩٣)^٢][١ - (,٧٨)^٢]}}$$

$$= ,٩٧٦$$

∴ الارتباط الجزئي بين $س_١$، $س_٢$ مع تثبيت أثر $س_٣$ قوي جداً وطردي .

تمارين الفصل السابع

(١) ارسم الشكل الانتشاري ثم أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين (س، ص) من البيانات التالية :

س	٢	٤	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠
ص	١	٣	٥	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٥

(٢) من البيانات التالية التي توضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص)

س	٥٠	٤٢	٥٧	٥٥	٤٤	٤٨	٥٣	٥٩
ص	٤٣	٤٤	٥٨	٥٩	٤١	٥٣	٥٢	٦٢

احسب : أ ــ معامل الارتباط الخطي البسيط لبيرسون .
ب ــ معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

(٣) الآتي تقديرات ثمانية من الطلبة في مادتي الاحصاء (س) والاقتصاد (ص) .

س	ممتاز	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	جيد	ممتاز	جيد
ص	جيد	ضعيف	جيد جداً	ضعيف	جيد	جيد	مقبول	جيد جداً

والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب .

(٤) فيمـا يلي درجات عشـرة من الـطلبـة في مـادتي المحـاسبـة (س) وإدارة الأعمال (ص).

س	١٨	١٢	١٦	١٥	١٠	٩	٦	١٢	١٥	١٧
ص	١١	٥	١٤	٨	٥	٧	٨	٨	١٣	١١

المطلوب :

حساب معامل ارتباط بيرسون وسبيرمان .

(٥) في دراسـة للظاهـرتين (س، ص) بـاستخـدام بيـانـات عن ١٠ وحـدات معاينة تبيّن أن مجـ س ص = ٤٧٥٠ وكذلك تبيّن ما يلي :

	الظاهرة س	الظاهرة ص
الوسط الحسابي	٣٠	١٦
الانحراف المعياري	٥	٢

احسب معامل الارتباط بين س ، ص

(٦) في دراسـة للظاهـرتين (س، ص) بـاستخـدام بيـانـات عن ١٠ وحـدات معاينة توافرت لديك المعلومات الآتية :

مجـ س ص = ٤٨٩٠   مجـ ص = ١٦٠

مجـ س = ٣٠٠   ع$_{س}$ = ٥

ع$_{ص}$ = ٢

والمطلوب حساب معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص) وفسر معناه .

(٧) الجدول التالي يلخص توزيع عيّنة من ٤٠٠ طالباً بحسب نوع الدراسة والمستوى الاجتماعي .

نوع الدراسة الثانوية	المستوى الاجتماعي				
	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	المجموع
ثانوي عام	٢٥	٤٠	١٦	٤	٨٥
ثانوي صناعي	١٢	٧٥	١٠٨	١٥	٢١٠
ثانوي تجاري	٣	٣٢	٦٠	١٠	١٠٥
المجموع	٤٠	١٤٧	١٨٤	٢٩	٤٠٠

والمطلوب حساب معامل التوافق لقياس العلاقة بين نوع الدراسة والمستوى الاجتماعي .

(٨) الجدول التالي يبين توزيع الدخول السنوية بالدينار لعيّنة مكونة من ٢٠٠ فرد نصفهم من الرجال ونصفهم الآخر من النساء .

هل هناك علاقة بين الدخل السنوي والنوع؟

الدخل السنوي	النوع	
	ذكر	أنثى
أقل من ٥٠٠ دينار	٥٥	٨٥
٥٠٠٠ فأكثر	٤٥	١٥

(٩) احسب معامل الارتباط بين العمر (س) لمجموعة من الأطفال وبين أوزانهم (ص) باستخدام الجدول المزدوج الآتي :

الوزن ص \ العمر س	٦-	٧-	٨-	٩-	١٠-١١	المجموع
١٥ -	-	٣	٥	٢	-	١٠
١٧ -	٣	٤	٧	٥	-	١٩
١٩ -	٥	٨	١٥	١٠	٢	٤٠
٢١ - ٢٣	٢	٣	٥	١	-	١١
المجموع	١٠	١٨	٣٢	١٨	٢	٨٠

(١٠) الجدول التالي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص)

ص \ س	١٠ -	١٥ -	٢٠ - ٢٥	المجموع
٣ -	١٠	٥	٥	٢٠
٤ -	٥	٢٥	١٥	٤٥
٥ - ٦	٥	٢٥	٥	٣٥
المجموع	٢٠	٥٥	٢٥	١٠٠

والمطـلوب :

١ ــ حساب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص).

٢ ــ ايجاد الوسيط لقيم (ص).

٣ ــ ايجاد المنوال لقيم (س).

(١١) إذا علمت أن المتغير س١ يرمز إلى درجة النجاح في الاختبار

المتغير س٢ يرمز إلى عدد ساعات المذاكرة اليومية

المتغير س٣ يرمز إلى درجة الذكاء للطالب

وإذا كانت معاملات الارتباط الخطية بين أزواج المتغيرات هي :

$ر_{٢١}$ = ٠,٦٠ ، $ر_{٣١}$ = ٠,٣٥ ، $ر_{٣٢}$ = ٠,٢٥

احسب : ١ ـ معامل الارتباط المتعدد بين درجة النجاح في الاختبار وكل من درجة الذكاء وعدد ساعات المذاكرة اليومية .

٢ ـ معامل الارتباط الجزئي بين درجة النجاح ودرجة الذكاء مع استبعاد أثر عدد ساعات المذاكرة اليومية .

(١٢) من البيانات التالية عن المتغيرات (ص، $س_{١}$، $س_{٢}$)

ص	٦٤	٧١	٥٣	٦٧	٥٥	٥٨	٧٧	٥٧	٥٦	٥١
$س_{١}$	٥٧	٥٩	٤٩	٦٢	٥١	٥٠	٥٥	٤٨	٥٢	٤٢
$س_{٢}$	٨	١٠	٦	١١	٨	٧	١٠	٩	١٠	٦

والمطلوب :

١ ـ حساب معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع (ص) والمتغيرين المستقلين ($س_{١}$ ، $س_{٢}$).

٢ ـ حساب معامل الارتباط الجزئي بين (ص، $س_{١}$) مع تثبيت ($س_{٢}$).

الفصل الثامن

الانحــدار الخـطــي

أولاً : الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression

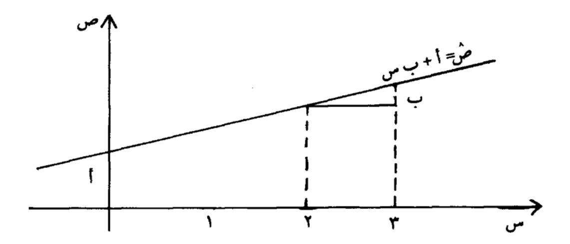
من دراستنا السابقة أمكننا تمثيل العلاقة بين المتغيرين (س، ص) بيـانياً باستخدام أشكال الانتشار المختلفة وكذلك أمكن معرفة درجة واتجـاه العلاقـة الخطية بينهما .

وفي هـذا الفصل سـوف نركـز على معرفـة الصورة الـرياضيـة للعـلاقـة الخـطيـة البسيـطة بين متغيـرين وذلـك بعـد تحـديـد كـل من المتغيـر التـابـع (Dependent Variable) والمتغير المستقل (Independent Variable) في النموذج الخطي البسيط .

معادلة انحدار (ص) على (س) :

إذا كـانت هنـاك عـلاقـة بين متغيـرين (س ، ص) بحيث أنـه إذا تغيَّـر أحـدهما أثـر ذلك على قيمـة المتغير الآخـر . فـإن أبسط العـلاقـات لتقـريب العلاقة بين هذين المتغيرين هي العلاقة الخـطية البسيـطة . وبفرض أن (ص) هو المتغير التابع و(س) هو المتغير المستقـل فإن الصـورة العامـة لخط انحدار (ص) على (س) هي :

$$\hat{ص} = أ + ب\, س \qquad (٨ - ١)$$



حيث تعرف (ب) على أنها معامل انحدار (ص) على (س) وتساوي معدل تغيّر (ص) عندما تتغير (س) بمقدار وحدة واحدة وتساوي كذلك معدل تغير (ص) منسوب إلى معدل تغير (س) و(ب) هي كذلك ظل الزاوية التي يصنعها خط انحدار (ص) على (س) مع الأفق (محور س).

أما (أ) فهي قيمة المتغير (ص) عندما تكون قيمة (س) صفراً أو الجزء الذي يقطعه خط انحدار (ص) على (س) من المحور الرأسي (محور ص).

يمكن تقدير قيمة كل من (أ ، ب) من خلال عينة من قيم المتغيرين (س) و(ص) وبالتالي نستطيع تقدير خط انحدار (ص) على (س) والذي يربط المتغير (ص) بالتغير في قيم (س) واستخدام هذه العلاقة في التنبؤ بقيم المتغير (ص) بدلالة قيم المتغير (س). ومن أهم طرق تقدير(أ ، ب) طريقة المربعات الصغرى (Least Square Method) وهي الطريقة التي يتم بموجبها تقدير (أ ، ب) وبالتالي تقدير خط انحدار (ص) على (س) بحيث يكون مجموع الفرق الناشىء بين القيم الفعلية للمتغير (ص) والقيم المقدرة (ضَ) باستخدام الخط المقدر لانحدار (ص) على (س) يساوي صفراً أو أن يكون مجموع مربعات هذه الفروق أقل ما يمكن لأي قيمة أخرى لكل من

(أ ، ب) . أي أنه بإيجاد مجـ (ص - صَ)^{2} وحساب التفاضل الجزئي مرة بالنسبة لـ (أ) وأخرى بالنسبة لـ (ب) ومساواة المعادلتين بالصفر نحصل على المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين :

$$\text{مجـ ص} = \text{ن أ} + \text{ب مجـ س} \qquad (8-2)$$

$$\text{مجـ س ص} = \text{أ مجـ س} + \text{ب مجـ س}^{2} \qquad (8-3)$$

وبحل هاتين المعادلتين جبرياً بالنسبة لـ (أ) و (ب) نحصل منهما على

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \text{ن } \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}}{\text{مجـ س}^{2} - \text{ن } \bar{\text{س}}^{2}} \qquad (8-4)$$

وبعد تحديد قيمة (ب) يمكن تحديد قيمة (أ) باستخدام المعادلة (٨ ــ ٢) والقسمة على (ن) فنحصل على :

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب } \bar{\text{س}} \qquad (8-5)$$

$$\text{حيث } \bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} \text{ ، } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

وبالتعويض بعد ذلك عن قيمتي (أ ، ب) في المعادلة (٨ ــ ١) نحصل على معادلة انحدار (ص) على (س) .

ملاحظة :

هناك صور مختلفة لمعادلة انحدار (ص) على (س) نذكر منها على سبيل المثال :

١ ــ إذا أردنا كتابة المعادلة كعلاقة في مجهول واحد وذلك بالتعويض عن (٨ ــ ٥) في (٨ ــ ١) فنحصل على معادلة انحدار (ص) على (س) في الصورة :

$$\text{ص} - \bar{\text{ص}} = \text{ب } (\text{س} - \bar{\text{س}}) \qquad (8-6)$$

حيث يمكن إيجاد معادلة انحدار (ص) على (س) بمعلومية معامل الانحدار والوسط الحسابي لكلتا الظاهرتين .

٢ ـ يمكن الحصول على معادلة انحدار (ص) على (س) بدلالة معامل الارتباط الذي سبق حسابه في الفصل السابق حيث يمكن إثبات صحة العلاقة .

$$ب = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \qquad (٨ ـ ٧)$$

حيث : ر معامل الارتباط

$ع_{س}$ الانحراف المعياري لقيم س

$ع_{ص}$ الانحراف المعياري لقيم ص

وبالتعويض عن (٨ ـ ٧) في (٨ ـ ٦) فإن معادلة انحدار (ص) على (س) تؤول إلى :

$$ص - \bar{ص} = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - \bar{س}) \qquad (٨ ـ ٨)$$

معادلة انحدار (س) على (ص) :

في هذه الحالة بفرض أن (ص) هي المتغير المستقل ، (س) هي المتغير التابع له وبافتراض أن العلاقة بينهما خطية مستقيمة فإنه يمكن التنبؤ بقيمة (س) إذا علمت قيمة (ص) باستخدام المعادلة :

$$\hat{س} = جـ + د\, ص \qquad (٨ ـ ٩)$$

ويمكن كما سبق تطبيق طريقة المربعات الصغرى لتحديد قيمة كل من (جـ ، د) على النحو التالي :

$$د = \frac{ن\, مجـ\, س\, ص - (مجـ\, س)\, (مجـ\, ص)}{ن\, مجـ\, ص^{٢} - (مجـ\, ص)^{٢}} \qquad (٨ ـ ١٠)$$

$$جـ = \overline{س} - د\ \overline{ص} \qquad (٨ - ١١)$$

ومن ثم نحصل على معادلة انحدار (س) على (ص) بالتعويض عن قيمتي (د ، جـ) في المعادلة (٨ ـ ٩) .

أيضاً بالتعويض عن قيمة (جـ) في (٨ ـ ١١) في المعادلة (٨ ـ ٩) فإن معادلة انحدار (س) على (ص) تؤول إلى :

$$س - \overline{س} = د\ (ص - \overline{ص}) \qquad (٨ - ١٢)$$

وباستخدام العلاقة بين معاملي الارتباط والانحدار في هذه الحالة :

$$د = ر \frac{ع_س}{ع_ص} \qquad (٨ - ١٣)$$

فإن معادلة انحدار (س) على (ص) في (٨ ـ ١٢) تؤول إلى :

$$س - \overline{س} = ر \frac{ع_س}{ع_ص} (ص - \overline{ص}) \qquad (٨ - ١٤)$$

مثال (٨ ـ ١) :

فيما يلي درجات عشرة من الطلبة في مادتي المحاسبة (س) والاحصاء (ص) :

س	١١	٧	١٥	٩	٦	٨	٩	٩	١٣	١٣
ص	١٩	١١	١٦	١٥	١٠	٨	٧	١٢	١٥	١٧

والمطلوب :

١ ـ ايجاد معادلة انحدار (ص) على (س) .

٢ ـ التنبؤ بقيمة ص عندما س = ١٠.

٣ ـ ايجاد معادلة انحدار (س) على (ص) ٠

الحـــل :

س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
١١	١٩	٢٠٩	١٢١	٣٦١
٧	١١	٧٧	٤٩	١٢١
١٥	١٦	٢٤٠	٢٢٥	٢٥٦
٩	١٥	١٣٥	٨١	٢٢٥
٦	١٠	٦٠	٣٦	١٠٠
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٩	١٢	١٠٨	٨١	١٤٤
١٣	١٥	١٩٥	١٦٩	٢٢٥
١٣	١٧	٢٢١	١٦٩	٢٨٩
١٠٠	١٣٠	١٣٧٢	١٠٧٦	١٨٣٤

معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$\hat{ص} = أ + ب\ س$$

حيث

$$ب = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}$$

$$= \frac{١٠ \times ١٣٧٢ - ١٠٠ \times ١٣٠}{١٠ \times ١٠٧٦ - ١٠٠٠٠}$$

$$ب = \frac{١٣٧٢٠ - ١٣٠٠٠}{١٠٧٦٠ - ١٠٠٠٠} = \frac{٧٢٠}{٧٦٠}$$

∴ ب = ٠,٩٤٧٤

∵ أ = $\bar{ص}$ - ب $\bar{س}$

$$= \frac{١٣٠}{١٠} - ٠,٩٤٧٤ \times \frac{١٠٠}{١٠}$$

= ١٣ - ٠,٩٤٧٤ × ١٠

= ١٣ - ٩,٤٧٤ = ٣,٥٢٦٣

∴ معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$\hat{ص}$ = ٣,٥٢٦٣ + ٠,٩٤٧٤ س

وقيمة $\hat{ص}$ عندما س = ١٠ هي :

$\hat{ص}$ = ٣,٥٢٦٣ + ٠,٩٤٧٤ × ١٠ = ١٣

٣ ـ ايجاد معادلة انحدار (س) على (ص)

$$د = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{ن\ مجـ\ ص^٢ - (مجـ\ ص)^٢} = \frac{٧٢٠}{١٤٤٠} = ٠,٥٠$$

جـ = $\bar{س}$ - د $\bar{ص}$

= ١٠ - ,٥٠ × ١٣ = ٣,٥

∴ معادلة انحدار (س) على (ص) هي :

$\hat{س}$ = جـ + د ص

$\hat{س}$ = ٣,٥ + ٥ر ص

ملاحظات :

١ ـ يستطيع القارىء أن يصل إلى نفس النتيجة إذا استخدم طريقة الانحرافات البسيطة وفي هذه الحالة فإن :

$$ب = \frac{ن\ مجـ\ ح_{س}\ ح_{ص} - (مجـ\ ح_{س})\ (مجـ\ ح_{ص})}{ن\ مجـ\ ح_{س}^٢ - (مجـ\ ح_{س})^٢}$$

حيث $ح_س$ = س - $أ_١$ ، $ح_ص$ = ص - $أ_٢$

وأن $أ_١$ ، $أ_٢$ أوساط فرضية لقيم الظاهرتين .

٢ ــ يمكن ايجاد معامل الارتباط بمعلومية معاملي الانحدار حيث نجد أنه بضرب المعادلتين (٨ ــ ٧) ، (٨ ــ ١٣) نحصل على :

$$ر^٢ = ب \ د$$

$$\therefore ر = \sqrt{ب \ د} \qquad (٨ ــ ١٥)$$

٣ ــ من المعادلتين (٨ ــ ٧) ، (٨ ــ ١٣) يمكن بمعلومية معاملي الانحدار والانحراف المعياري لكل من المتغيرين (س ، ص) ايجاد معامل الارتباط الخطي البسيط (معامل بيرسون) من خلال العلاقات :

$$ر = ب \frac{ع_س}{ع_ص} \qquad (٨ ــ ١٦)$$

$$ر = د \frac{ع_ص}{ع_س} \qquad (٨ ــ ١٧)$$

٤ ــ خط انحدار (ص) على (س) يمر بالنقطة ($\overline{س}$ ، $\overline{ص}$) وكذلك خط انحدار (س) على (ص) وعليه فإن خطا الانحدار يتقاطعان في نقطة واحدة احداثياها ($\overline{س}$ ، $\overline{ص}$) .

معامل التحديد

Coefficient of Determination

معامل التحديد هو مقياس رقمي محصور بين الصفر والـواحد الصحيـح وهو عبارة عن نسبة معيّنة تعكس مدىٰ نجاح نموذج الانحدار الخطي في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع وبالتالي فإن هـذا المعامـل يقيس مدى صـلاحية العـلاقـة الخـطيـة المستخـدمـة في تفسيـر العـلاقـة بين المتغيـرات المستخـدمة ، وكلمـا اقتربت قيمتـه من الواحـد الصحيح كلمـا دلَّ ذلك على ازدياد صلاحية العلاقة الخطية في تمثيل العلاقة بين المتغيرات المستخدمـة . ويرمز لمعامل التحديد بالرمز ($ر^٢$)، حيث يعرف بالعلاقة التالية :

$$ر^٢ = \frac{مجـ (ص - \bar{ص})^٢ - مجـ (ص - \hat{ص})^٢}{مجـ (ص - \bar{ص})^٢} = ١ - \frac{مجـ (ص - \hat{ص})^٢}{مجـ (ص - \bar{ص})^٢}$$

حيث : (٨ ـ ١٨)

مجـ (ص − $\bar{ص}$)^٢ تسمى مجموع المربعات الكلي .

مجـ (ص − $\hat{ص}$)^٢ تسمى مجموع مربعات الخطأ .

وفي حالة الانحدار الخطي البسيط فإن معامل التحديد للنموذج الخـطي يساوي :

$$ر^٢ = \frac{أ\, مجـ ص + ب\, مجـ س ص - ن\, \bar{ص}^٢}{مجـ ص^٢ - ن\, \bar{ص}^٢} \qquad (٨ ـ ١٩)$$

ملاحظة :

في حالة الانحدار الخطي البسيط فإن معامل التحديد للنموذج يساوي مربع معامل ارتباط بيرسون الخطي .

في المثال السابق :

$$ر^{٢} = \frac{(٣,٥٢٦٣ \times ١٣٠) + (٠,٩٤٧٤ \times ١٣٧٢) - ١٠ (١٣)^{٢}}{١٨٣٤ - ١٠ (١٣)^{٢}}$$

$$= \frac{٤٥٨,٤١٩٠ + ١٢٩٩,٨٣٢٨ - ١٦٩٠}{١٨٣٤ - ١٦٩٠} = \frac{٦٨,٢٥١٨}{١٤٤} = ٠,٤٧٤$$

يعني هذا أن النموذج الخطي المقدر لخط انحدار (ص) على (س) نجح في تفسير ٤٧,٤٪ من التغيرات في (ص) من خلال العلاقة الخطية مع المتغير (س) ويدل بالتالي على أن العلاقة الخطية ليست بالعلاقة القوية .

معامل الارتباط الخطي بين (س، ص) لهذا المثال يساوي ٠,٦٨٨٢ وبتربيع هذه القيمة يمكن الحصول على معامل التحديد السابق .

مثال (٨ ــ ٢) : إذا علمت أن :

$\bar{س} = ١٠$ ، $\bar{ص} = ٢٠$ ، $ع_{س} = ٢$ ، $ع_{ص} = ١,٥$

معامل الارتباط الخطي بين الظاهرتين (س، ص) هو ر = ٠,٦

أوجد : ١ ــ خط انحدار (ص) على (س).

٢ ــ خط انحدار (س) على (ص).

٣ ــ التنبؤ بقيمة س عندما ص = ١٠ .

الحـل :

١ ــ خط انحدار (ص) على (س) هو :

$$ص - \bar{ص} = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - \bar{س})$$

$ص - ٢٠ = ٦, \times \frac{١,٥}{٢} (س - ١٠)$

$ص - ٢٠ = ٤٥, (س - ١٠)$

$ص - ٢٠ = ٤٥, س - ٤,٥$

$\therefore ص = ٤٥, س + ١٥,٥$

٢ ــ خط انحدار (س) على (ص) هو :

$س - \overline{س} = ر \frac{ع_س}{ع_ص} (ص - \overline{ص})$

$س - ١٠ = ٦, \times \frac{٢}{١,٥} (ص - ٢٠)$

$س - ١٠ = ٨, (ص - ٢٠)$

$س - ١٠ = ٨, ص - ١٦$

$س = ٨, ص - ٦$

٣ ــ عندما ص = ١٠

$\therefore س = ٨, \times ١٠ - ٦$

$= ٨ - ٦ = ٢$

ملاحظــة :

نجد من الحل السابق أن ب = ٤٥, ، د = ٨,

ومن ثم فإن $ر = \sqrt{ب\ د} = \sqrt{٨, \times ٤٥,} = \sqrt{٣٦,} = ٦,$

وهذا يؤكد صحة الحل السابق .

مثال (٨ ــ ٣) : إذا علمت أن

معامل انحدار (ص) على (س) = ٤,

$\overline{س} = ٢٠$ ، $\overline{ص} = ٣٠$

١ ـ أوجد معادلة انحدار (ص) على (س).

٢ ـ أوجد معادلة انحدار (س) على (ص) إذا علمت أن معامل الارتباط بين الظاهرتين (س ، ص) هو ر = ٠,٨

الحـــل :

١ ـ معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$ص - \bar{ص} = ب (س - \bar{س})$$

$$ص - ٣٠ = ٠,٤ (س - ٢٠)$$

$$ص - ٣٠ = ٠,٤ س - ٨$$

$$ص = ٠,٤ س + ٢٢$$

٢ ـ بمعلومية ر = ٠,٨ ، ب = ٠,٤ يمكن ايجاد معامل انحدار (س) على (ص) من العلاقة .

$$ر^{٢} = ب \times د$$

$$٠,٦٤ = ٠,٤ د$$

$$\therefore د = \frac{٠,٦٤}{٠,٤} = ١,٦$$

∴ معادلة انحدار (س) على (ص) هي :

$$س - \bar{س} = د (ص - \bar{ص})$$

$$س - ٢٠ = ١,٦ (ص - ٣٠)$$

$$س - ٢٠ = ١,٦ ص - ٤٨$$

$$س = ١,٦ ص - ٢٨$$

الخطأ المعياري للتقدير

Standard Error of Estimate

عند دراسة انحدار (ص) على (س) فإن الخطأ المعياري للتقدير (أو ما يسمى بخطأ التقدير) هو الخطأ في تقدير قيمة (ص) إذا علمت قيمة (س) وهو مؤشر لقياس درجة انتشار القيم الأصلية (ص) حول خط الانحدار

ص = أ + ب س ويرمز له بالرمز $ع_{ص/س}$ وهو الجذر التربيعي للمقدار :

$$ع^{٢}_{ص/س} = \frac{١}{ن - ٢} \{ مجـ (ص - صَ)^{٢} \} \qquad (٨ - ٢٠)$$

نلاحظ أننا طرحنا المقدار (٢) من حجم العينة في المقام نظراً لأننا قدرنا معلمتين وهما (أ ، ب) من بيانات العيّنة . والمقام (ن - ٢) يسمى بدرجات الحرية .

وبالتعويض عن صَ = أ + ب س في المعادلة (٨ - ٢٠) نصل إلى الصورة التالية لمربع الخطأ المعياري للتقدير .

$$ع^{٢}_{ص/س} = \frac{١}{ن - ٢} (مجـ ص^{٢} - ب مجـ س ص - أ مجـ ص) \qquad (٨ - ٢١)$$

وبالمثل عند دراسة انحدار (س) على (ص) فإن الخطأ المعياري لتقدير قيمة (س) بمعلومية قيمة (ص) يمكن حسابه من العلامة .

$$ع^{٢}_{س/ص} = \frac{١}{ن - ٢} (مجـ س^{٢} - د مجـ س ص - جـ مجـ س) \qquad (٨ - ٢٢)$$

حيث قيمة (س) المقدرة هي سَ = جـ + د ص .

وتتضح أهمية الخطأ المعياري للتقدير في استخدامه في كثير من اختبارات الفروض الاحصائية وفي تقدير معامل الارتباط .

العلاقة بين خطأ التقدير ومعامل الارتباط :

بافتراض النموذج الخطي البسيط وبالتعويض عن قيمتي (أ ، ب) في (٨ ــ ٥) ، (٨ ــ ٧) على الترتيب في المعادلة (٨ ــ ٢١) نصل إلى العلاقة التالية :

$$ع^{٢}_{ص/س} = ع^{٢}_{ص} (١ - ر^{٢}) \qquad (٨ - ٢٣)$$

ومن ثم يمكن ايجاد الخطأ المعياري للتقدير بمعلومية معامل الارتباط والانحراف المعياري للمتغير (ص) من العلاقة :

$$ع_{ص/س} = ع_{ص} \sqrt{١ - ر^{٢}} \qquad (٨ - ٢٤)$$

كما أننا بمعلومية مربع خطأ التقدير وتباين (ص) يمكننا حساب معامل التحديد $ر^{٢}$ من العلاقة :

$$ر^{٢} = ١ - \frac{ع^{٢}_{ص/س}}{ع^{٢}_{ص}} \qquad (٨ - ٢٥)$$

وهذه الصورة لمعامل التحديد تعادل العلاقة السابقة في (٨ ــ ١٨) وبأخذ الجذر التربيعي للناتج في (٨ ــ ٢٥) نحصل على قيمة معامل الارتباط الخطي البسيط .

مثال (٨ ــ ٤) :

إذا توافرت لديك البيانات التالية عن الظاهرتين (س، ص) :

مجـ س = ٥٣٠   مجـ ص = ٤٥٠   ن = ١٠

مجـ س ص = ٢٤٩٢٤   مجـ $س^{٢}$ = ٢٩٩٨٢   مجـ $ص^{٢}$ = ٢١١٤٤

والمطلوب إيجاد : ــ

١ ــ معادلة انحدار (ص) على (س).

٢ ـ خطأ التقدير لخط انحدار (ص) على (س).
٣ ـ معامل الارتباط الخطي البسيط بمعلومية خطأ التقدير .

الحـــل :

$$ب = \frac{\text{ن مجـ س ص ـ (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س}^{٢} \text{ ـ (مجـ س)}^{٢}}$$

$$= \frac{١٠ \times ٢٤٩٢٤ - ٥٣٠ \times ٤٥٠}{١٠ \times ٢٩٩٨٢ - (٥٣٠)^{٢}} = ٠{,}٥٦٨$$

$$أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س} = ٤٥ - ٠{,}٥٦٨ \times ٥٣ = ١٤{,}٩$$

معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$\hat{ص} = ١٤{,}٩ + ٠{,}٥٦٨\ س$$

٢ ـ الخطأ المعياري للتقدير هو الجذر التربيعي للمقدار .

$$ع^{٢}_{ص/س} = \frac{١}{ن - ٢} \text{ (مجـ ص}^{٢} \text{ ـ ب مجـ س ص ـ أ مجـ ص)}$$

$$= \frac{١}{٨} (٢١١٤٤٤ - ٠{,}٥٦٨ \times ٢٤٩٢٤ - ١٤{,}٩ \times ٤٥٠)$$

$$= ٣٥{,}٢٧$$

$$\therefore \text{ خطأ التقدير } ع_{ص/س} = \sqrt{٣٥{,}٢٧} = ٥{,}٩٤$$

وهـذا يعني أنـه لتقـديـر قيمـة (ص) بمعلوميـة قيمـة (س) فـإن الخـطأ المعياري لهذا التقدير هو ٥,٩٤ .

$$٣ ـ ع^{٢}_{ص} = \frac{\text{مجـ ص}^{٢}}{ن} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{ن}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٢١١٤٤}{١٠} - (٤٥)^{٢} = ٨٩{,}٤$$

$$ر^٢ = ١ - \frac{ع^٢_{ص/س}}{ع^٢_ص}$$

$$= ١ - \frac{٣٥,٢٧}{٨٩,٤} = ,٦٠٥$$

∴ معامل الارتباط بمعلومية الخطأ المعياري للتقدير .

$$= \sqrt{,٦٠٥} = ,٧٧٨$$

ملاحظات :

١ - يستطيع القارىء أن يحصل على معامل الارتباط الخطي باستخدام الصورة المباشرة لمعامل بيرسون .

٢ - في حالة الارتباط التام (ر = ± ١) فإن $ع^٢_{ص/س}$ = صفر أي أنه لا يكون هناك خطأ في التقدير في حالة الارتباط التام .

ثانياً : الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

يمكن تعميم دراستنا لأسلوب الانحدار الخطي البسيط في حالة دراسة العلاقة بين متغير تابع وعدد من المتغيرات المستقلة . ولتوضيح فكرة الانحدار الخطي المتعدد نفترض أن لدينا متغيراً تابع (ص) ومتغيرين مستقلين هما ($س_١$ ، $س_٢$) وأن العلاقة بينهما خطية في الصورة

$$\hat{ص} = أ + ب_١ س_١ + ب_٢ س_٢ \qquad (٨ - ٢٦)$$

حيث :

أ مقدار ثابت

$ب_١$ هي مقدار التغير في قيمة (ص) نتيجة لزيادة ($س_١$) بوحدة واحدة مع ثبات تأثير ($س_٢$) .

$ب_٢$ هي مقدار التغير في قيمة (ص) نتيجة لزيادة ($س_٢$) بوحدة واحدة مع ثبات تأثير ($س_١$) .

ولإيجاد القيم (أ، $ب_١$، $ب_٢$) نستخدم طريقة المربعات الصغرى والتي تتضمن أن يكون مجموع مربعات انحرافات القيم عن خط الانحدار أقل ما يمكن . وبتقدير مجموع مربعات الانحرافات واجراء التفاضل الجزئي بالنسبة لكل من (أ، $ب_١$ ، $ب_٢$) يمكن الحصول على مجموعة المعادلات الآتية :

$$مجـ ص = ن أ + ب_١ مجـ س_١ + ب_٢ مجـ س_٢$$

$$مجـ س_١ ص = أ مجـ س_١ + ب_١ مجـ س_١^٢ + ب_٢ مجـ س_١ س_٢ \qquad (٨ - ٢٧)$$

$$مجـ س_٢ ص = أ مجـ س_٢ + ب_١ مجـ س_١ س_٢ + ب_٢ مجـ س_٢^٢$$

حيث يمكن حـل هـذه المعـادلات لتقـديـر قيم (أ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$) باستخدام طريقة التعويض أو استخدام أسلوب المحددات أو المصفوفـات في حل مجموعة من المعادلات الخطية .

الخطأ المعياري للتقدير وعلاقته بمعامل الارتباط :

يمكن الحصـول على مربـع الخطأ المعيـاري للتقديـر في هذه الحـالـة باستخدام العلاقة .

$$\text{ع}^{٢}_{\text{ص}/\text{س}_{١}\text{،}\text{س}_{٢}} = \frac{١}{\text{ن} - ٣} (\text{مجـ ص}^{٢} - \text{ب}_{١}\ \text{مجـ س}_{١}\ \text{ص} - \text{ب}_{٢}\ \text{مجـ س}_{٢}\ \text{ص} - \text{أ}.$$

٨)

ونلاحظ أننا طرحنا ٣ من حجم العينة في المقام نـظراً لأننا قـدرنا ثـلاثة معالم في هذه الحالة وهم (أ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$) من بيانات العينة .

وبـالمثل يمكن اثبـات العلاقـة بين الخطأ المعيـاري للتقـديـر ومعـامـل الارتباط في الصورة .

$$\text{ع}^{٢}_{\text{ص}/\text{س}_{١}\text{ ، }\text{س}_{٢}} = \text{ع}^{٢}_{\text{ص}} (١ - \text{ر}^{٢}) \qquad (٨ - ٢٩)$$

ومن ثم يمكن ايجاد معامل الارتباط المتعـدد بمعلومية الخـطأ المعياري للتقدير وتباين (ص) من العلاقة

$$\text{ر} = \sqrt{١ - \frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ص}/\text{س}_{١}\text{ ، }\text{س}_{٢}}}{\text{ع}^{٢}_{\text{ص}}}} \qquad (٨ - ٣٠)$$

وتجدر الإشارة هنا بأنه قد سبق ايجاد معامـل الارتباط المتعـدد بطريقـة أخرى باستخدام معامـلات الارتباط الخـطية البسيـطة بين الظواهـر في الفصل

السابق بالمعادلة (٧ ــ ١١) وللحصول على معامل الارتباط المتعدد بهذه الطريقة يجب اتباع الخطوات التالية : ــ

١ ــ تقدير قيم (أ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$) بحل مجموعة المعادلات (٨ ــ ٢٧) بافتراض معادلة الانحدار الخطي المتعدد .

٢ ــ استخدام العلاقة (٨ ــ ٢٨) في ايجاد مربع الخطأ المعياري للتقدير .

٣ ــ ايجاد تباين (ص) .

٤ ــ استخدام العلاقة (٨ ــ ٣٠) في ايجاد معامل الارتباط المتعدد .

كما يتضح في حل المثال التالي :

مثال (٨ ــ ٥) : إذا علمت أن :

مجـ ص = ١٥	مجـ $ص^{٢}$ = ٥٥	مجـ $س_{١}$ ص = ٧٢
مجـ $س_{١}$ = ٢٠	مجـ $س_{١}^{٢}$ = ٩٦	مجـ $س_{٢}$ ص = ١٠٥
مجـ $س_{٢}$ = ٣٠	مجـ $س_{٢}^{٢}$ = ٢٠٦	مجـ $س_{١}$ $س_{٢}$ = ١٣٦
ن = ٥		

أوجد معامل الارتباط المتعدد بين (ص) وكل من ($س_{١}$ ، $س_{٢}$)

الحـــل :

١ ــ بافتراض معادلة الانحدار المتعدد بين (ص) وكل من ($س_{١}$ ، $س_{٢}$) في الصورة : $\hat{ص}$ = أ + $ب_{١}$ $س_{١}$ + $ب_{٢}$ $س_{٢}$

ولتحديد قيم (أ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$) بالتعويض في مجموعة المعادلات (٨ ــ ٢٧) نحصل على :

١٥ = ٥ أ + ٢٠ $ب_{١}$ + ٣٠ $ب_{٢}$

٧٢ = ٢٠ أ + ٩٦ $ب_{١}$ + ١٣٦ $ب_{٢}$

١٠٥ = ٣٠ أ + ١٣٦ $ب_{١}$ + ٢٠٦ $ب_{٢}$

وبحل هذه المعادلات نجد أن :

أ = ــ ٦,   ،   ب$_{١}$ = ٤٥,   ،   ب$_{٢}$ = ٣,

ومعادلة الانحدار المتعدد هي :

$$\hat{ص} = ٤٥,\, س_{١} + ٣,\, س_{٢} - ٦,$$

٢ ــ مربع الخطأ المعياري للتقدير :

$$ع^{٢}_{ص/س_{١}،س_{٢}} = \frac{١}{ن - ٣}(مجـ ص^{٢} - ب_{١}\, مجـ س_{١}\, ص - ب_{٢}\, مجـ س_{٢}\, ص - أ\, مجـ ص)$$

$$= \frac{١}{٢}\{٥٥ - ٤٥,\,(٧٢) - ٣,\,(١٠٥) + ٦,\,(١٥)\}$$

$$= ٠٥,$$

٣ ــ تباين (ص) :

$$ع^{٢}_{ص} = \frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - (\frac{مجـ ص}{ن})^{٢}$$

$$= \frac{(٥٥)^{٢}}{٥} - (\frac{١٥}{٥})^{٢} = ٥٩٦$$

٤ ــ معامل الارتباط المتعدد :

$$ر = \sqrt{١ - \frac{ع^{٢}_{ص/س_{١}،س_{٢}}}{ع^{٢}_{ص}}}$$

$$= \sqrt{١ - \frac{,٠٥}{٥٩٦}} = ,٩٩$$

∴ الارتباط قوي جداً بين المتغيرات الثلاثة . وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام معاملات الارتباط الخطية البسيطة بين أزواج المتغيرات في مثال (٧ ــ ١٠) .

مثال (٨ ــ ٦) :

من البيانات التالية :

ص	٦	٤	١٠	٩	٧	٥	٢	٨	٤	١٠
س$_1$	٧	٥	٩	١٠	٨	٧	٤	٨	٢	٩
س$_2$	٢٣	٢٢	١٩	٢٤	٢٢	٢٥	٢٢	١٩	٢٤	٢١

المطـلـوب :

١ ــ إيجاد خط الانحدار المتعدد (ص) على (س$_1$ ، س$_2$) .

٢ ــ ايجاد الخطأ المعياري للتقدير.

٣ ــ ايجاد معامل الارتباط المتعدد .

الحـــل :

ص	س$_1$	س$_2$	ص^2	س$_1^2$	س$_2^2$	س$_1$ص	س$_2$ص	س$_1$س$_2$
٦	٧	٢٣	٣٦	٤٩	٥٢٩	٤٢	١٣٨	١٦١
٤	٥	٢٢	١٦	٢٥	٤٨٤	٢٠	٨٨	١١٠
١٠	٩	١٩	١٠٠	٨١	٣٦١	٩٠	١٩٠	١٧١
٩	١٠	٢٤	٨١	١٠٠	٥٧٦	٩٠	٢١٦	٢٤٠
٧	٨	٢٢	٤٩	٦٤	٤٨٤	٥٦	١٥٤	١٧٦
٥	٧	٢٥	٢٥	٤٩	٦٢٥	٣٥	١٢٥	١٧٥
٢	٤	٢٢	٤	١٦	٤٨٤	٨	٤٤	٨٨
٨	٨	١٩	٦٤	٦٤	٣٦١	٦٤	١٥٢	١٥٢
٤	٢	٢٤	١٦	٤	٥٧٦	٨	٩٦	٤٨
١٠	٩	٢١	١٠٠	٨١	٤٤١	٩٠	٢١٠	١٨٩
٦٥	٦٩	٢٢١	٤٩١	٥٣٣	٤٩٢١	٥٠٣	١٤١٣	١٥١٠

١ ـ معادلة خط الانحدار المتعدد هي :

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}_1\,\text{س}_1 + \text{ب}_2\,\text{س}_2$$

حيث قيم (أ، ب١، ب٢) يمكن تحديدها بحل مجموعة المعادلات الآتية :

$$٦٥ = ١٠\,\text{أ} + ٦٩\,\text{ب}_1 + ٢٢١\,\text{ب}_2$$

$$٥٠٣ = ٦٩\,\text{أ} + ٥٣٣\,\text{ب}_1 + ١٥١٠\,\text{ب}_2$$

$$١٤١٣ = ٢٢١\,\text{أ} + ١٥١٠\,\text{ب}_1 + ٤٩٢١\,\text{ب}_2$$

باستخدام طريقة التعويض يمكن للقارى أن يصل إلى :

$$\text{أ} = ٦{,}٦١٦ \ ،\ \text{ب}_1 = {,}٨٨ \ ،\ \text{ب}_2 = -\ {,}٢٨$$

ومعادلة الانحدار المتعدد هي :

$$\hat{\text{ص}} = ٦{,}٦١٦ + {,}٨٨\,\text{س}_1 - {,}٢٨\,\text{س}_2$$

٢ ـ مربع الخطأ المعياري للتقدير :

$$\text{ع}^2_{\text{ص/س}_1\text{،س}_2} = \frac{١}{\text{ن} - ٣}\left(\text{مجـ ص}^2 - \text{ب}_1\,\text{مجـ س}_1\text{ص} - \text{ب}_2\,\text{مجـ س}_2\text{ص} - \text{أ مجـ ص}\right)$$

$$= \frac{١}{٧}\left\{٤٩١ - {,}٨٨(٥٠٣) - {,}٢٨(١٤١٣) - ٦{,}٦١٦(٦٥)\right\}$$

$$= ١{,}٩٩٤$$

$$\text{الخطأ المعياري للتقدير} = \sqrt{١{,}٩٩٤} = ١{,}٤١$$

٣ ـ $\text{ع}^2_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}^2}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^2$

$$= \frac{٤٩١}{١٠} - \left(\frac{٦٥}{١٠}\right)^2 = ٦{,}٨٥$$

٤ ـ معامل الارتباط المتعدد

$$\text{ر} = \sqrt{1 - \frac{\text{ع}^2_{\text{ص}/\text{س}_1 ، \text{س}_2}}{\text{ع}^2_{\text{ص}}}}$$

$$\text{ر} = \sqrt{1 - \frac{1,994}{6,85}} = \sqrt{\text{٧٠٩ر}} = \text{٨٤ر}$$

∴ الارتباط قوي بين المتغير التابع (ص) وكل من المتغيرين المستقلين (س_1 ، س_2) .

ملاحظة هامة :

نظراً لأن القارىء في هذه المرحلة قد لا يكون ملماً بأساليب حل مجموعة من المعادلات الخطية ومن ثم يكون من الأيسر له التعويض المباشر لإيجاد قيم الثوابت (أ ، ب_1 ، ب_2) . وباستخدام التعويض الجبري في حل مجموعة المعادلات (٨ ــ ٢٧) نجد أن ٠

$$\text{ب}_1 = \frac{(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_2)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{ص}}) - (\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{س}}_2)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_2\tilde{\text{ص}})}{(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_1)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_2) - (\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{س}}_2)^2} \qquad (\text{٨ ــ ٣١})$$

$$\text{ب}_2 = \frac{(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_1)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_2\tilde{\text{ص}}) - (\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{س}}_2)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{ص}})}{(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_1)(\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}^2_2) - (\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{س}}_2)^2} \qquad (\text{٨ ــ ٣٢})$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}_1\,\bar{\text{س}}_1 - \text{ب}_2\,\bar{\text{س}}_2 \qquad (\text{٨ ــ ٣٣})$$

حيث :

$$\tilde{\text{ص}} = \text{ص} - \bar{\text{ص}} ،\ \tilde{\text{س}}_1 = \text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1 ،\ \tilde{\text{س}}_2 = \text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2$$

هي الانحرافات عن الأوساط الحسابية وأن :

$$\text{مجـ}\,\tilde{\text{ص}}^2 = \text{مجـ}\,(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2 = \text{مجـ}\,\text{ص}^2 - \frac{(\text{مجـ}\,\text{ص})^2}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ}\,\tilde{\text{س}}_1\tilde{\text{ص}} = \text{مجـ}\,(\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)(\text{ص} - \bar{\text{ص}})$$

$$= \text{مجـ}\,\text{س}_1\text{ص} - \frac{(\text{مجـ}\,\text{س}_1)(\text{مجـ}\,\text{ص})}{\text{ن}}$$

وبالمثل نحسب المجاميع الأخرى اللازمة لإيجاد القيم ($ب_١$ ، $ب_٢$) في (٨ ــ ٣١) ، (٨ ــ ٣٢) ومن ثم إيجاد قيمة (أ) في (٨ ــ ٣٣) وتقدير معادلة الانحدار المتعدد بعد ذلك بالتعويض في (٨ ــ ٢٦) كما يتضح في المثال التالي :

مثال (٨ ــ ٧) :

أوجد معادلة خط الانحدار المتعدد (ص) على ($س_١$ ، $س_٢$) بالتعويض المباشر من بيانات المثال السابق (٨ ــ ٦) .

الحــل :

$$\text{مجـ } \tilde{\text{ص}}^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}} = ٤٩١ - \frac{(٦٥)^{٢}}{١٠} = ٦٨,٥$$

$$\text{مجـ } \tilde{\text{س}}_{١}^{٢} = \text{مجـ س}_{١}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_{١})^{٢}}{\text{ن}} = ٥٣٣ - \frac{(٦٩)^{٢}}{١٠} = ٥٦,٩$$

$$\text{مجـ } \tilde{\text{س}}_{٢}^{٢} = \text{مجـ س}_{٢}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_{٢})^{٢}}{\text{ن}} = ٤٩٢١ - \frac{(٢٢١)^{٢}}{١٠} = ٣٦,٩$$

$$\text{مجـ } \tilde{\text{س}}_{١}\tilde{\text{ص}} = \text{مجـ س}_{١}\text{ص} - \frac{(\text{مجـ س}_{١})(\text{مجـ ص})}{\text{ن}}$$

$$= ٥٠٣ - \frac{(٦٩)(٦٥)}{١٠} = ٥٤,٥$$

$$\text{مجـ } \tilde{\text{س}}_{٢}\tilde{\text{ص}} = \text{مجـ س}_{٢}\text{ص} - \frac{(\text{مجـ س}_{٢})(\text{مجـ ص})}{\text{ن}}$$

$$= ١٤١٣ - \frac{(٢٢١)(٦٥)}{١٠} = -٢٣,٥$$

$$\text{مجـ } \tilde{\text{س}}_{١}\tilde{\text{س}}_{٢} = \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_{١})(\text{مجـ س}_{٢})}{\text{ن}}$$

$$= ١٥١٠ - \frac{(٦٩)(٢٢١)}{١٠} = -١٤,٩$$

وبالتعويض في (٨ ــ ٣١) نحصل على قيمة $ب_١$

$$\text{ب}_{١} = \frac{(٣٦,٩)(٥٤,٥) - (-١٤,٩)(-٢٣,٥)}{(٥٦,٩)\,(٣٦,٩) - (-١٤,٩)^{٢}}$$

$$= \frac{٢٠١١,٠٥ - ٣٥٠,١٥}{١٨٧٧,٦} = ,٨٨$$

وبالتعويض في (٨ ــ ٣٢) نحصل على قيمة $\text{ب}_{٢}$.

$$\text{ب}_{٢} = \frac{(٥٦,٩)(-٢٣,٥) - (-١٤,٩)\,(٥٤,٥)}{١٨٧٧,٦}$$

$$= \frac{-١٣٣٧,١٥ + ٨١٢,٠٥}{١٨٧٧,٦} = -\,,٢٨$$

بالتعويض في (٨ ــ ٣) نحصل على قيمة (أ)

$$\text{أ} = \frac{٦٥}{١٠} - ,٨٨\left(\frac{٦٩}{١٠}\right) - (-\,,٢٨)\left(\frac{٢٢١}{١٠}\right)$$

$$= ٦,٥ - ٦,٠٧٢ + ٦,١٨٨ = ٦,٦١٦$$

وبالتعويض في (٨ ــ ٢٦) نحصل على معادلة خط الانحدار المتعدد في الصورة

$$\hat{\text{ص}} = ٦,٦١٦ + ,٨٨\,\text{س}_{١} - ,٢٨\,\text{س}_{٢}$$

مثال (٨ ــ ٨) :

أوجد معادلة خط انحدار (ص) على ($\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$) بالتعويض المباشر من بيانات مثال (٨ ــ ٥) .

الحــل :

$$\text{مجـ ص}^{٢} = ٥٥ - \frac{(١٥)^{٢}}{٥} = ١٠$$

$$\text{مجـ س}_{١}^{٢} = ٩٦ - \frac{(٢٠)^{٢}}{٥} = ١٦$$

$$\text{مجـ س}_{٢}^{٢} = ٢٠٦ - \frac{(٣٠)^{٢}}{٥} = ٢٦$$

$$\text{مجـ س}_{١}\text{ ص} = ٧٢ - \frac{(٢٠)\,(١٥)}{٥} = ١٢$$

$$\text{مجـ س}_{٢}\text{ ص} = ١٠٥ - \frac{(٣٠)\,(١٥)}{٥} = ١٥$$

$$\text{مجـ س}_{١}\text{ س}_{٢} = ١٣٦ - \frac{(٢٠)\,(٣٠)}{٥} = ١٦$$

$$\text{ب}_{١} = \frac{(٢٦)\,(١٢) - (١٦)\,(١٥)}{(١٦)\,(٢٦) - (١٦)^{٢}} = \frac{٣١٢ - ٢٤٠}{١٦٠} = ,٤٥$$

$$\text{ب}_{٢} = \frac{(١٦)\,(١٥) - (١٦)\,(١٢)}{١٦٠} = \frac{٢٤٠ - ١٩٢}{١٦٠} = ,٣$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}_{١}\,\bar{\text{س}}_{١} - \text{ب}_{٢}\,\bar{\text{س}}_{٢}$$

$$= \frac{١٥}{٥} - ,٤٥\left(\frac{٢٠}{٥}\right) - ,٣\left(\frac{٣٠}{٥}\right)$$

$$= ٣ - ١,٨ - ١,٨ = - ,٦$$

∴ معادلة خط الانحدار المتعدد هي :

$$\hat{\text{ص}} = - ,٦ + ,٤٥\,\text{س}_{١} + ,٣\,\text{س}_{٢}$$

وهي نفس النتيجة التي سبق الحصول عليها .

تمارين الفصل الثامن

(١) من الجدول التالي الذي يوضح العلاقة بين المتغيرين (س، ص) :

س	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨
ص	٥٣	٥٧	٦٣	٧٢	٨	٨٧	٨٤

أ ــ أوجد معادلة انحدار (ص) على (س)

ب ــ تنبأ بقيمة (ص) عندما (س) = ٥٠

جـ ــ أوجد معادلة انحدار (س) على (ص).

(٢) إذا توافرت لديك البيانات الآتية عن المتغيرين (س ، ص) .

مجـ س = ٧٤   مجـ $س^٢$ = ٦٠٦   مجـ س ص = ٤٤٨

مجـ ص = ٦١   مجـ $ص^٢$ = ٤٧٧   ن = ١٠

أ ــ أوجد معادلة خط الانحدار (ص) على (س).

ب ــ احسب معامل الارتباط الخطي البسيط اذا علمت أن معادلة خط انحدار (س) على (ص) هي س = ٤٩ر ص + ١١ر٤.

(٣) البيانات التالية عبارة عن ملخص احصائي لبيانات أخذت عن أسعار عشر سلع في كل من سنة ١٩٧٥ (المتغير س) وأسعارها المقابلة في سنة ١٩٨٥ (المتغير ص).

مجـ س = ٥٠   مجـ ص = ٦٠   مجـ س ص = ٤٠٠

مجـ $س^٢$ = ٥٠٠   مجـ $ص^٢$ = ٦١٠

أ ــ أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط لتقدير أسعار سنة ١٩٨٥ باستخدام أسعار ١٩٧٥ .

ب ــ أوجد الخطأ المعياري للتقدير ثم اشتق معامل الارتباط الخطي البسيط .

(٤) في دراسة للظاهرتين (س، ص) باستخدام بيانات عن ١٠ وحدات معاينة ، تبين أن مجـ س ص = ٤٧٥٠ وكذلك تبين ما يلي :

	الظاهرة س	الظاهرة ص
الوسط الحسابي	٣٠	١٦
الانحراف المعياري	٥	٢

أ ــ احسب معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص).

ب ــ ما هو تقديرك لقيمة (س) إذا كانت قيمة ص = ٨ .

(٥) فيما يلي بيان عن درجات عشرة من الطلبة في اختبارين أخدهما في المحاسبة (س)، وثانيهما في الادارة (ص) .

س	٣٢	٤٠	٥٠	٢٥	٤٠	٣٢	٤٦	٣٢	٤٥	٢٨
ص	٣٩	٢٧	٢٣	٣٩	٢٧	١٦	١٨	٣٣	٢٧	٤٧

أ ــ أوجد معادلة خط انحدار (س) على (ص)

ب ــ أوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س).

جـ ــ استنتج قيمة معامل الارتباط الخطي البسيط بين (س، ص) بدلالة معاملي الانحدار .

د ــ أوجد الخطأ المعياري لتقدير انحدار (ص) على (س) ثم اشتق معامل الارتباط الخطي البسيط للتأكد من صحة الحل في (جـ) .

(٦) إذا علمت أن : ص ترمز إلى الوزن

$س_1$ ترمز إلى الطول

$س_2$ ترمز إلى العمر

وكانت :

مجـ ص = ٧٥٣ ، مجـ $س_1$ = ٦٤٣ ، مجـ $س_2$ = ١٠٦

مجـ $ص^2$ = ٤٨١٣٩ ، مجـ $س_1^2$ = ٣٤٨٤٣ ، مجـ $س_2^2$ = ٩٧٦

مجـ $س_1$ ص = ٤٠٨٣٠ ، مجـ $س_2$ ص = ٦٧٩٦ ،

مجـ $س_1$ $س_2$ = ٥٧٧٩ ن = ١٢

أ ــ أوجد معادلة خط انحدار الوزن على كل من الطول والعمر .

ب ــ أوجد معامل الارتباط المتعدد .

(٧) من البيانات التالية لقيم المتغيرات (ص، $س_1$، $س_2$) .

ص	٨	٥	٢	١	٦	٤	٨	٧	٩
$س_1$	٨	٥	٣	٢	٦	٤	٧	٦	٨
$س_2$	٢	٣	٠	١	٤	٥	٨	٦	٧

أ ــ أوجد معادلة انحدار (ص) على كل من ($س_1$ ، $س_2$) .

ب ــ أوجد الخطأ المعياري للتقدير .

جـ ــ أوجد معامل الارتباط المتعدد .

(٨) البيانات التالية هي ملخص دراسة على ١٠ وحدات معاينة لدراسة العلاقة بين الظواهر (ص، $س_1$ ، $س_2$) :

مجـ ص = ١٩١ ، مجـ $س_1$ = ٢٢٧٠ ، مجـ $س_2$ = ٦٨٦

مجـ $س_1$ ص = ٤٨٦٩٠، مجـ $س_2$ ص = ١٢٥٦٩،

مجـ $س_1$ $س_2$ = ١٣٩٥٦٥

مجـ $س_1^2$ = ٥٩٤٨٣٢ ، مجـ $س_2^2$ = ٥٢٦٨٢، مجـ $ص^2$ = ٤٢٦٧

والمطلوب :

أ ــ ايجاد معادلة انحدار (ص) على كل من $س_1$ ، $س_2$.

ب ــ ايجاد معامل الارتباط المتعدد .

جـ ــ ايجاد معامل الارتباط الجزئي بين (ص، $س_1$) مع تثبيت أثر ($س_2$).

(٩) البيانات التالية هي دراسة على ١٠ أسر لدراسة العلاقة بين الانفاق السنوي على الملابس (ص) بالألف دينار وعدد أفراد الأسرة ($س_1$) ودخل الأسرة السنوي ($س_2$) بالألف دينار .

ص	,٨	١,٤	,٣	٢,٣	٣,٨	٢,١	٣,٣	٢,٩	٣	٤
$س_1$	١	٢	١	٢	٢	٣	٤	٣	٥	٣
$س_2$	٢١	٢٥	١٠	٣٧	٤٨	٢٧	٣٥	٣٥	٢٥	٥١

والمطلوب :

أ ــ ايجاد معادلة الانحدار المتعدد (ص) على كل من ($س_1$ ، $س_2$).

ب ــ تقدير الانفاق السنوي على الملابس لأسرة عدد أفرادها ٢ ودخلها السنوي ٢٥ ألف دينار .

جـ ــ ايجاد معامل الارتباط المتعدد .

الفصل التاسع

تحليل السلاسل الزمنية

Time Series Analysis

١ ــ تعريف السلسلة الزمنية :

السلسلة الزمنية لأي ظاهرة هي التسلسل الزمني لتغير قيم أو مقادير هذه الظاهرة وذلك في سلسلة تواريخ متتابعة مثل سنين أو أشهر أو أيام وغالباً ما تكون الفترات الزمنية متساوية ومتتالية .

ولما كان الزمن هو عنصر أساسي في السلسلة الزمنية فأحياناً تسمى بالسلسلة التاريخية وتنتج هذه السلاسل الزمنية من مشاهدة الظواهر التي نبحثها مدة من الزمن وقياسها في فترات زمنية منتظمة وتسجيلها في جداول إحصائية .

٢ ــ أهمية التحليل الاحصائي للسلاسل الزمنية :

ينحصر الغرض من السلسلة الزمنية في أنها تسجل لنا مقادير أو قيم الظاهرة تحت البحث وما يطرأ عليها من تغيرات خلال الزمن وذلك تمهيداً لدراسة هذه التغيرات ومعرفة أسبابها ونتائجها وما يمكن أن يكون هناك من علاقة بين هذه الظاهرة وغيرها من الظواهر المرتبطة بها .

ويساعد التحليل الاحصائي للظواهر الاقتصادية كثيراً من الاقتصاديين ورجال الأعمال على فهم ودراسة التغير الذي وقع للظاهرة في الماضي والحاضر وحتى يمكن التنبؤ بالصورة الحقيقية لسلوك الظاهرة في المستقبل كما أن دراسة المؤثرات التي تؤثر على تطور الظاهرة محل الدراسة وخاصة الظواهر الاجتماعية والاقتصادية تساعد على التخطيط السليم في المستقبل .

٣ ــ أمثلة السلاسل الزمنية :

السلاسل الزمنية هي التي تصور وتلخص الظواهر الاقتصادية المختلفة خلال فترات زمنية متتالية ومن أمثلة ذلك : ــ

ـ كميات الانتاج السنوي من سلعة معيّنة كالقطن أو البترول .
ـ عدد السكان سنوياً أو في فترات التعداد .
ـ عدد الطلبة الحاصلين على الماجستير أو الدكتوراه سنوياً .
ـ قيمة المبيعات بإحدى محلات القطاع العام شهرياً .
ـ عدد الطائرات التي تقلع من أحد المطارات شهرياً أو يومياً .
ـ درجات الحرارة اليومية في مدينة معيّنة .

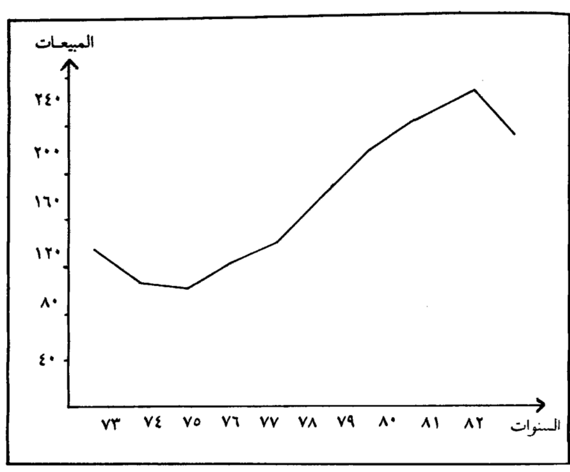
وقبل البدء في تحليل السلاسل الزمنية ودراسة عناصرها نأخذ المثال الرقمي التالي لتوضيح فكرة عرض السلاسل الزمنية في صورة رسم بياني .

مثال (٩ ـ ١) :

الأرقام التالية للمبيعات السنوية لإحدى المحلات التجارية مقاسة بالألف دينار :

السنة	المبيعات
١٩٧٣	١٤٢
١٩٧٤	١٢٠
١٩٧٥	١١٨
١٩٧٦	١٣٢,٥
١٩٧٧	١٤٣,٥
١٩٧٨	١٧٠
١٩٧٩	١٩٢,٥
١٩٨٠	٢١١,٥
١٩٨١	٢١٧
١٩٨٢	٢٠١

بـرسم الخط البياني للسلسلة الـزمنية يمكن تـوضيح السيـر الـزمني لهـا بيانياً :



شكل (٩ ــ ١)

٤ ــ عناصر أو مركبات السلسلة الزمنية :

تبدأ دراسة السلسلة الزمنية بمحاولة التعرف على مركبـاتها أو عنـاصرهـا لدراسة وبحث ما تعرضت لـه الظاهـرة في الماضي وللتنبؤ بقيمـة الظاهـرة في المستقبل .

ويمكن تقسيم المؤثرات على أي سلسلة زمنية إلى أربعة هي :

(١) الاتجاه العام **Trend**

(٢) التغيرات الدورية **Cyclical Variations**

(٣) التغيرات الموسمية **Seasonnal Variations**

(٤) التغيرات العرضية أو غير المنتظمة **Irregular Variations**

أولاً : الاتجاه العام :

هو عبارة عن التغيير المنتظم للمشاهدات والظواهر خلال فترة زمنية طويلة سواء كان هذا تغيراً بالزيادة أو النقص فهناك ظواهر بطبيعتها تتزايد باستمرار مثل معدل النمو السكاني وظواهر تتناقص مثل معدل الوفيات في الدول النامية والمتقدمة .

وكما سبق ، اتضح أن البداية في دراسة السلسلة الزمنية هي تمثيلها بالرسم ونحصل على خط متعرج يحدد اتجاهاً عاماً للظاهرة تنحو نحوه وقد نجد أن :

* خط الاتجاه العام صاعد من أسفل إلى أعلى أي أن الظاهرة تتزايد باستمرار .
* خط الاتجاه العام منحدر من أعلى إلى أسفل أي أن الظاهرة تتناقص باستمرار .
* خط الاتجاه العام يأخذ شكل خط مستقيم مواز للمحور الأفقي أي أن الظاهرة تتزايد أو تتناقص بمعدل ثابت .

وترجع أهمية تحليل الاتجاه العام على فترات زمنية طويلة للأسباب التالية :

(١) بعد قياس اثر الاتجاه العام يمكن قياس العناصر الأخرى مثل التغيرات الموسمية والدورية .

(٢) بدراسة الاتجاه العام للظواهر يمكن التعرف على سلوك الظواهر في الماضي والحاضر ومن ثم استخدام معادلة الاتجاه العام في التنبؤ بالمستقبل كما يتضح فيما بعد.

ثانياً : التغيرات الدورية :

هي التغيـرات التي تعكس حالات الكسـاد والانتعاش التي يتعـرض لها الاقتصاد القومي فمن الواضح أن هناك تغيرات تطرأ على الظواهـر الاقتصاديـة بطريقة شبه منتظمة حيث تتغير المشاهدات خلال فترة زمنية بالزيادة حتى تصل إلى أقصى حـد ممكن (فترات الانتعـاش) أو تنقص حتى تصل إلى أقـل حد ممكن (فترات الكساد) .

والتقلبات الدورية لا تخضع لنظام ثابت في تغيرها بمعنى أن الفترة التي تفصل بين حالتي الكساد والانتعاش لا تتسم بالثبات فقـد تكون ٣ أو ٥ أو ١٠ أو . . . . سنوات مما يؤدي إلى طول الدورة التجـارية وصعـوبة التنبؤ بهـا وقد نتج عن دراسة الدورات الاقتصادية تمييز ثلاثة أنواع هامة هي :

(١) دورة طويلة المدى: تمتد حوالي ٥٠ سنة .
(٢) دورة متوسطة المدى: مداها ٨ ـ ٩ سنوات.
(٣) دورة قصيرة المدى: مداها ٣ ـ ٤ سنوات .

ومن ثم يتضح أنه لـدراسة اثـر الدورة يجب استخـدام قيم الظاهـرة عن مدة طويلة من السنين حتى يتبيّن اثرها واضحاً .

ثالثاً : التغيرات الموسمية :

هي التغيرات الزمنية المنتظمة أو المتكررة خلال فترة زمنيـة لا تزيـد عن سنـة . فالسلسلة الـزمنية تتـأثر بحـالة الـطلب والعـرض والتي تتـأثـر بـدورهـا بالتغيرات الفصلية وتغيرات المناخ والطقس مثل :

معدل استهلاك المياه يزداد في فصل الصيف .
الطلب على الملابس الثقيلة يزداد في فصل الشتاء .

ومن ثم لا يمكن تعيين التغيـرات في قيم الظواهـر بمجـرد تحـديـد اثـر

الاتجاه العام فقط بل إن هناك تغيرات موسمية تؤثر على كل ظاهرة وتختلف مدتها باختلاف نوع الظاهرة وظروفها .

رابعاً : التغيرات العرضية :

وهي التي لا تحدث إلّا لظروف غير متوقعة أو شاذة والتي تؤثر بدورها على الظواهر الاقتصادية مثل قيام الحروب والثورات أو انتشار الأوبئة والأمراض أو حدوث فيضانات أو زلازل .

وسوف يتركز اهتمامنا عند تحليلنا للسلاسل الزمنية على محاولة فصل تأثير كل عنصر من العناصر السابقة عن العناصر الأخرى وفيما يختص بالتغيرات العرضية أو غير المنتظمة فيمكن اهمالها على اعتبار انها تحدث عادة على فترات متباعدة ومن ثم يمكن دراسة تلك الظواهر في الفترات التي لا تحدث فيها مثل هذه التغيرات غير المنتظمة .

المتغيرات السابقة كلها تتضافر مع بعضها البعض لتكون قيم الظاهرة المدروسة زمنياً . وهي ليست بعوامل منفصلة عن بعضها البعض ولكن لسهولة فهمها وتحليلها فصلناها نظرياً .

فمثلاً يصعب فصل التغيرات الموسمية عن الدورية ، لذلك فإن عملية دراسة هذه العناصر وطرق تحليلها تكون متعددة .

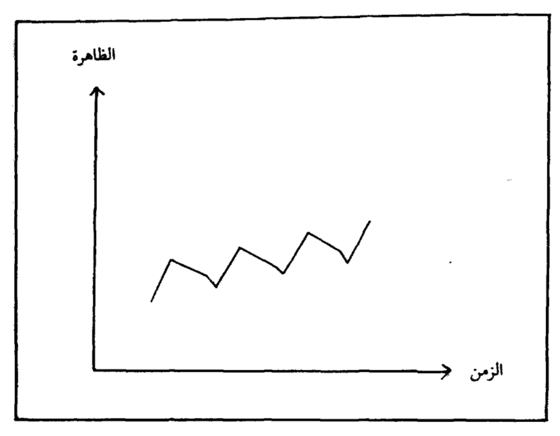
٥ ـ نماذج السلاسل الزمنية :

يمكن تقسيم السلاسل الزمنية على أساس علاقة العناصر الأربع السابقة إلى نموذجين :

١ ـ النموذج التجميعي : Additive Model :

وهو الذي تحدد فيه قيم الظاهرة على أساس الجمع الجبري للعناصر الأربع السابقة .

شكل (٩ ــ ٢)



$$ص_ر = ت_ر + م_ر + د_ر + ع_ر$$

حيث : $ت_ر$ القيمة الاتجاهية للظاهرة عن الفترة ر.

$م_ر$ أثر الموسمية على الظاهرة عن الفترة ر.

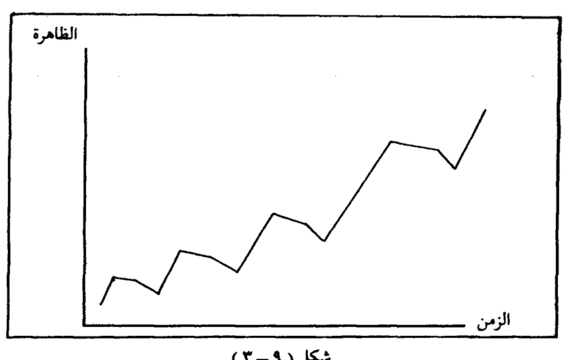
$د_ر$ أثر الدورية على الظاهرة عن الفترة ر .

$ع_ر$ أثر المتغيرات العرضية على الظاهرة عن الفترة ر .

٢ ــ نموذج الضرب Multiplicative Model :

وهو الذي يفترض أن قيمة الظاهرة تتحدد من حاصل ضرب العناصر السابقة :

$$ص_ر = ت_ر \times م_ر \times د_ر \times ع_ر$$



شكل (٩ ـ ٣)

وتجدر الإشارة إلى أن نموذج الضرب هو الأكثر شيوعاً وهو الذي نفترضه في تحليلنا . وفي هذا النموذج يمكن دراسة وتقدير كل عنصر من عناصر السلسلة على حدة وبمعزل عن العناصر الأخرى. ونظراً لتشابك العناصر المختلفة للسلسلة الزمنية وذلك لتداخل العوامل التي تؤثر فيها تتعرض هذه النماذج لكثير من النقد وبالرغم من ذلك فإنها الأكثر استخداماً عند تحليل السلاسل الزمنية .

مما سبق يتضح انه يمكن فصل تأثير كل عنصر من العناصر السابقة ـ بافتراض نموذج الضرب ـ باعتبار أن هذه العناصر مستقلة . ويمكن توضيح العلاقة بين أي ظاهرة (ص) والعناصر المختلفة من اتجاه عام (ت) وتغير دوري (د) وتغير موسمي (م) وتغير عرضي (ع) بالشكل التالي :

ص = ف (س)   بمعنى (ص) دالة في المتغير الزمني (س)

ص = ف (ت، م، د، ع)

٦ ــ : قياس عناصر السلسلة الزمنية :

لدراسة السلاسل الزمنية ندرس مكونات هذه السلسلة :

أولاً : طرق تقدير الاتجاه العام

هنالك عدة طرق لدراسة الاتجاه العام في السلاسل الزمنية .

سوف نقتصر على أربع طرق هي :

(١) طريقة تقدير الاتجاه العام بيانياً من الرسم .
(٢) طريقة تقدير الاتجاه العام بطريقة شبه المتوسطات .
(٣) طريقة المربعات الصغرى لتقدير الاتجاه العام .
(٤) طريقة المتوسطات المتحركة .

(١) طريقة التمهيد البياني Free hand Method :

ويتم بواسطتها قياس الاتجاه العام بطريقة بسيطة وذلك بتمثيل بيانات السلسلة الزمنية ــ كما سبق شرحها في المثال السابق ــ ثم تحديد شكل العلاقة بين تغير قيم الظاهرة (ص) بالنسبة للزمن (س) ويتم تمهيد خط (أو منحنى) الاتجاه العام بحيث يتوسط قيم الظاهرة .

ونستخدم هذه الطريقة عادة لتعطي صورة عامة عن سلوك الظاهرة بالإضافة إلى أنها توفر كثيراً من الوقت والقيود التي يفرضها استخدام صيغة رياضية معيّنة لتمثيل الاتجاه العام ولكن يعيب هذه الطريقة انه لا يجب الاعتماد عليها في التنبؤ لأنها تعكس عادة التحيز والتحكم الواضح للباحث عند تمثيل البيانات وتمهيد خط الاتجاه العام . ويمكن تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية :

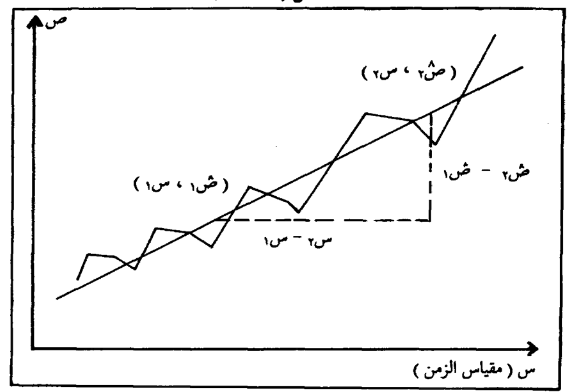
$$ص = أ + ب س \qquad (٩ - ١)$$

وذلك بتحديد كل من أ ، ب . حيث تحدد قيمة (ب) بأخذ نقطتين على الخط الممهد ، وفي النقطتين نحدد (ب) من العلاقة :

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \qquad (٩ - ٢)$$

وهي تمثل ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها الخط المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

شكل (٩ ــ ٤)



حيث ضَ $_١$ هي قيمة ص$_١$ على الخط الممهد عندما س = س$_١$
وضَ $_٢$ هي القيمة على هذا الخط المناظرة ل س$_٢$.

ونحدد (أ) بالجزء الذي يقطعه هذا الخط المستقيم من المحور الرأسي . وباختصار يمكن تحديد معادلة الخط المستقيم بتحديد نقطتين عليه من العلاقة :

$$\frac{\text{ص} - \text{ضَ}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ضَ}_٢ - \text{ضَ}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$\text{ص} - \text{ضَ}_١ = \left(\frac{\text{ضَ}_٢ - \text{ضَ}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \right) (\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - \text{ضَ}_١ = \text{ب} (\text{س} - \text{س}_١) .$$

لذلك فإن :

$$\text{ص} = \text{ب} (\text{س} - \text{س}_١) + \text{ضَ}_١ = \text{أ} + \text{ب س}$$

حيث : $\text{أ} = \text{ضَ}_١ - \text{ب س}_١$ (٩ ــ ٣)

ومن ثم حساب قيمتي أ ، ب والتعويض في (٩ ــ ١) نحصل على معادلة الاتجاه العام .

ملاحظات على هذه الطريقة :

هذه الطريقة غير دقيقة في تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية ، وتعتمد على تقدير الشخص للخط وعلى دقة رسم الخط البياني للسلسلة ، وقلما تستخدم لحساب أو تقدير الاتجاه العام وذلك لاختلاف تقدير الاتجاه العام باختلاف الشخص الذي يقدره .

(٢) طريقة شبه المتوسطات :

تعتمد هذه الطريقة في تقدير الاتجاه العام للسلاسل الزمنية على تقسيم السلاسل الزمنية إلى قسمين متساويين بقدر الامكان ، ثم يحسب متوسط قيمة السلسلة لكل جزء على حده (متوسط المتغير الذي يقيس الظاهرة) ، ثم نوقع هاتين النقطتين على رسم الخط البياني للسلسلة ونوصل النقطتين بخط مستقيم يكون هو الخط المقدر للاتجاه العام للسلسلة ، وبمعرفة هاتين النقطتين تحسب معادلة الخط المستقيم هذا (ص = أ + ب س) من العلاقة :

$$\frac{ص - \overline{ص}_١}{س - \overline{س}_١} = \frac{\overline{ص}_٢ - \overline{ص}_١}{\overline{س}_٢ - \overline{س}_١} \quad \text{وبالضرب في } (س - \overline{س}_١)$$

$$\therefore ص - \overline{ص}_١ = \left(\frac{\overline{ص}_٢ - \overline{ص}_١}{\overline{س}_٢ - \overline{س}_١}\right)(س - \overline{س}_١)$$

لذلك فإن :

$$ص = \left(\frac{\overline{ص}_٢ - \overline{ص}_١}{\overline{س}_٢ - \overline{س}_١}\right)(س - \overline{س}_١) + \overline{ص}_١ \qquad (٩ - ٤)$$

$$= \hat{ب}\,(س - \overline{س}_١) + \overline{ص}_١$$

$$= \hat{ب}\,س + (\overline{ص}_١ - ب\,\overline{س}_١)$$

$$= \hat{ب}\,س + \hat{أ}$$

حيث $\bar{س}_1$: متوسط المتغير الزمني للفترة الأولى .

$\bar{ص}_1$: متوسط الظاهرة للفترة الأولى .

$\hat{ب}$: قيمة ب المقدرة .

$\hat{أ}$: قيمة أ المقدرة.

مثال (٩ ــ ٢) :

السلسلة السابقة يمكن ايجاد معادلة الاتجاه العام لها باستخدام طريقة شبه المتوسطات كالآتي : ــ

السنوات (س)	المبيعات (ص)	
المجموعة الأولى		
١٩٧٣	١٤٢	
١٩٧٤	١٢٠	$\bar{س}_1$ = ١٩٧٥ ، مجـ $س_1$ = ٩٨٧٥
١٩٧٥	١١٨	
١٩٧٦	١٣٢,٥	$\bar{ص}_1$ = ١٣١,٢ ، مجـ $ص_1$ = ٦٥٦
١٩٧٧	١٤٣,٥	
المجموعة الثانية		
١٩٧٨	١٧٠	
١٩٧٩	١٩٢,٥	$\bar{س}_2$ = ١٩٨٠ ، مجـ $س_2$ = ٩٩٠٠
١٩٨٠	٢١١,٥	
١٩٨١	٢١٧	$\bar{ص}_2$ = ١٩٨,٤ ، مجـ $ص_2$ = ٩٩٢
١٩٨٢	٢٠١	

معادلة الاتجاه العام :

$$ص = \frac{(\bar{ص}_2 - \bar{ص}_1)}{(\bar{س}_2 - \bar{س}_1)} \times (س - \bar{س}_1) + \bar{ص}_1$$

$$= \left(\frac{١٩٨,٤ - ١٣١,٢}{١٩٨٠ - ١٩٧٥} \right) \times (س - ١٩٧٥) + ١٣١,٢$$

$$= \frac{٦٧,٢}{٥} \times (س - ١٩٧٥) + ١٣١,٢$$

$$= ١٣,٤٤ \; (س - ١٩٧٥) + ١٣١,٢$$

$$= ١٣,٤٤ \; س + (- ١٩٧٥ \times ١٣,٤٤) + ١٣١,٢$$

$$ص = ١٣,٤٤ \; س - ٢٦٤١٢,٨$$

ملاحظات على طريقة شبه المتوسطات :

الطريقة سريعة في تقدير خط الاتجاه العام ونتائجها معقولة نوعاً ما ولا يختلف فيها اثنان إذا بدأ بنفس المجموعات . إذا كان عدد الفترات الزمنية فردياً وليس زوجياً كما كان الحال في المثال السابق فإننا في العادة نأخذ مجموعتين متساويتين ونهمل المفردة التي في الوسط (بين المجموعتين) . ويعاب على هذه الطريقة تأثرها بالقيم الشاذة إن وجدت في إحدى المجموعتين (وذلك لأن الوسط الحسابي مقياس يتأثر بالقيم الشاذة ويكون مظللاً) لذلك فإن من الأفضل استبعاد القيم الشاذة في هذه الطريقة . وهناك طرق أخرى لتقدير الاتجاه العام أفضل من طريقة شبه المتوسطات وهي طريقة المربعات الصغرى .

(٣) طريقة المربعات الصغرى في تقدير معادلة الاتجاه العام للسلاسل الزمنية Least Square Method :

فكرة هذه الطريقة هي نفس فكرة إيجاد خط انحدار (ص) على (س) في دراستنا للانحدار البسيط . حيث إننا هنا نوجد معادلة انحدار الظاهرة (ص) على الزمن (س) والمتمثلة بمعادلة الخط المستقيم :

$$\hat{ص} = أ + ب \; س$$

وتقدر كل من قيم (أ ، ب) باستخدام فكرة المربعات الصغرى والتي تهدف إلى تقدير لكل من (أ ، ب) بحيث نحقق أقل مجموع لمربعات الخطأ { مجـ (ص - ضَ)^{٢} } حيث تقدر (ب) و (أ) كما سبق في الفصل الثامن من المعادلتين :

$$ب = \frac{ن \text{ مجـ س ص} - (\text{مجـ س}) (\text{مجـ ص})}{ن \text{ مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \qquad (٩ - ٥)$$

$$أ = \bar{ص} - ب \bar{س} \qquad (٩ - ٦)$$

في مثالنا السابق :

مجـ س ص	=	٣٢٥٩٨٦٢	ن	=	١٠
مجـ س	=	١٩٧٧٥	مجـ س^{٢}	=	٣٩١٠٥١٤٥
مجـ ص	=	١٦٤٨	مجـ ص^{٢}	=	٢٨٤٨١٥

$$ب = \frac{١٠ \times ٣٢٥٩٨٦٢ - (١٩٧٧٥) (١٦٤٨)}{١٠ \times ٣٩١٠٥١٤٥ - ١٩٧٧٥^{٢}} = ١١,٤١٨٢$$

$$أ = ١٩٧٧,٥ - ١١,٤١٨٢ \times ١٦٤,٨ = - ٢٢٤١٤,٦٥٥$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

$$ضَ = ١١,٤١٨٢ \text{ س} - ٢٢٤١٤,٦٥٥$$

مثال (٩ - ٣) :

إذا كانت المبيعات من أجهزة التليفزيون الملون (ص) خلال الفترة ١٩٧٣ - ١٩٨١ هي : -

السنة (س)	المبيعات (ص)
١٩٧٣	٩٣٠٠
١٩٧٤	١٠٢٨٠
١٩٧٥	١٢٦٧٠
١٩٧٦	١٠٣٥٠
١٩٧٧	١٠٥٧٠
١٩٧٨	١٣٣٢٠
١٩٧٩	١٥٦٧٠
١٩٨٠	١٧٥٧٠
١٩٨١	١٦١٦٠
١٧٧٩٣	١١٥٨٩٠

مجـ $س^2$ = ٣٥١٧٦٨٢١   مجـ $ص^2$ = ١٥٦٤٣٦٦٥٠٠

مجـ س ص = ٢٢٩١٧٢٨١٠   ن = ٩

وبـالتعويض في المعـادلتين (٩ ـ ٥) ، (٩ ـ ٦) على التـرتيب نجـد أن :

ب = ٩٧١,٣٣٣ ، أ = - ١٩٠٧٤٤٩,٣٣٣

∴ معادلة الاتجاه العام الخطية هي :

ضَ = ٩٧١,٣٣٣ س - ١٩٠٧٤٤٩,٣٣٣

تعتبر طريقة المربعات الصغرى من أدق طرق قياس الاتجاه العام ، فإذا كان شكل انتشار بيانات الظاهرة قريباً من صورة الخط المستقيم فـإننا نستـطيع

تقريب العلاقة التي تربط الظاهرة المدروسة بالزمن من خلال الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم السابق ذكرها ومن ثم يمكن تحديد قيم الثوابت للمعادلة (أ ، ب) وتحديد القيم الاتجاهية (ص) واستخدامها في التنبؤ بقيم الظاهرة في المستقبل .

ويختلف حل المعادلات لإيجاد قيم كل من (أ ، ب) باختلاف قيم المتغير الذي يقيس الزمن . ففي كثير من الأحيان - خاصة إذا كانت الفترة الزمنية التي يبدأ عندها قياس السلسلة رقماً كبيراً كسنة ١٩٧٨ مثلاً - نلجأ إلى تعديل المتغير الزمني وذلك بطرح مقدار أو سنة معيّنة (سنة الأساس) من قيم المتغير الزمني بهدف تبسيط العمليات الحسابية . فإذا أخذنا سنة الأساس مثلاً أي سنة كانت بخلاف السنة الوسطى فتسمى طريقة الحساب بطريقة الانحرافات المطولة لحل المعادلات . أما إذا كانت سنة الأساس هي السنة الوسطى للسلسلة الزمنية (أي التي تجعل مجـ س = صفراً ، حيث (س) السنوات المعدلة بعد طرح سنة الأساس من السنوات الأصلية) فتسمى بالطريقة المختزلة وفي هذه الحالة تظهر مشكلة ما إذا كان عدد السنوات فردياً أو زوجياً كما سيتضح من الأمثلة التالية والتي تعالج استخدام طريقة المربعات الصغرى في إيجاد معادلة الاتجاه العام الخطي .

مثال (٩ - ٤) :

الجدول التالي يوضح مقدار الاستثمارات في قطاع معيّن في المدة من ١٩٧٨ إلى ١٩٨٦ مقربة إلى مليون جنيه .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
الاستثمار	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠١	٩٨	٨٦	١٠٣

والمطـــلوب :

١ ــ ايجاد معادلة الاتجاه العام والقيم الاتجاهية .

٢ ــ التنبؤ بقيمة الاستثمار سنة ١٩٨٨ .

الحـــل :

١ ــ الطريقة المطولة (سنة ١٩٧٨ كأساس) :

السنة	الاستثمار (ص)	الانحرافات عن سنة الأساس (س)	س ص	$س^2$	القيم الاتجاهية صَ
١٩٧٨	٦٨	صفر	صفر	صفر	٦٩,٤٨
١٩٧٩	٥٠	١	٥٠	١	٧٤,١١
١٩٨٠	٨١	٢	١٦٢	٤	٧٨,٧٤
١٩٨١	١٠٥	٣	٣١٥	٩	٨٣,٣٨
١٩٨٢	١٠٠	٤	٤٠٠	١٦	٨٨
١٩٨٣	١٠١	٥	٥٠٥	٢٥	٩٢,٦٣
١٩٨٤	٩٨	٦	٥٨٨	٣٦	٩٧,٩٦
١٩٨٥	٨٦	٧	٦٠٢	٤٩	١٠١,٨٩
١٩٨٦	١٠٣	٨	٨٢٤	٦٤	١٠٥,٥٢
المجموع	٧٩٢	٣٦	٣٤٤٦	٢٠٤	

$$ب = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$= \frac{٩ \times ٣٤٤٦ - ٣٦ \times ٧٩٢}{٩ \times ٢٠٤ - ٣٦ \times ٣٦} = ٤,٦٣$$

$أ = \bar{ص} - ب \bar{س}$

$= \frac{٧٩٢}{٩} - ٤,٦٣ \times \frac{٣٦}{٩} = ٨٨ - ٤,٦٣ \times ٤$

$= ٦٩,٤٨$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

ضَ = أ + ب س

ضَ = ٦٩,٤٨ + ٤,٦٣ س

وبالتعويض عن قيم (س) صفر، ١ ، ٢ ، . . . . ، ٨ نحصل على القيم الاتجاهية في العمود الأخير للجدول .

القيم الاتجاهية لحجم الاستثمار سنة ١٩٨٨ (يناظرها س = ١٠ في الجدول)

= ٦٩,٤٨ + ٤,٦٣ × ١٠

= ٦٩,٤٨ + ٤٦,٣٠ = ١١٥,٧٨ مليون جنيه .

٢ ــ الطريقة المختزلة :

تستخدم هذه الطريقة لتبسيط العمليات الحسابية وتتمثل في محاولة جعل مجـ س = صفر وذلك بأخذ السنة الوسطى كأساس . وفي هذه الحالة تؤول قيم ثوابت معادلة الانحدار إلى :

$$ب = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^{٢}} \qquad (٩ ــ ٧)$$

$$أ = \frac{مجـ ص}{ن} = \bar{ص}$$

ونحصل على هذه النتيجة مباشرة بالتعويض عن مجـ س = صفر في المعادلتين (٩ ــ ٥) ، (٩ ــ ٦) على الترتيب .

وفي المثال السابق باختيار سنة ١٩٨٢ كأساس نحصل على الجدول التالي :

السنة	الاستثمار (ص)	الانحرافات عن ١٩٨٢ (س)	س ص	ص٢	القيم الاتجاهية ضَ
١٩٧٨	٦٨	- ٤	٢٧٢-	١٦	٦٩,٤٨
١٩٧٩	٥٠	- ٣	١٥٠-	٩	٧٤,١١
١٩٨٠	٨١	- ٢	١٦٢-	٤	٧٨,٧٤
١٩٨١	١٠٥	- ١	١٠٥-	١	٨٣,٣٧
١٩٨٢	١٠٠	صفر	صفر	صفر	٨٨
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	١	٩٢,٦٣
١٩٨٤	٩٨	٢	١٩٦	٤	٩٧,٩٦
١٩٨٥	٨٦	٣	٢٥٨	٩	١٠١,٨٩
١٩٨٦	١٥٣	٤	٤١٢	١٦	١٠٥,٥٢
المجموع	٧٩٢		٢٧٨	٦٠	

$$ب = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}} = \frac{٢٧٨}{٦٠} = ٤,٦٣$$

$$أ = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} = \frac{٧٩٢}{٩} = ٨٨$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

ص = أ + ب س

∴ ضَ = ٨٨ + ٤,٦٣ س

وبالتعويض عن قيم (س) المختلفة نحصل على القيم الاتجاهية بالعمود الأخير ويلاحظ أنها تطابق نفس النتائج التي حصلنا عليها بالطريقة المطولة .

والقيمة الاتجاهية للاستثمار سنة ١٩٨٨ (يناظرها س = ٦ في هذه الحالة)

= ٨٨ + ٤,٦٣ × ٦

= ٨٨ + ٢٧,٧٨ = ١١٥,٧٨ مليون جنيه

وهي نفس النتيجة السابقة .

ملاحظة هامة :

إذا كان عدد السنوات زوجياً فإن نقطة الأساس يجب أن تكون بين السنتين المتوسطتين حتى يكون مجـ س = صفراً .

والمثال التالي يوضح كيفية استخدام الطريقة المختزلة إذا كان عدد السنوات زوجياً .

مثال (٩ ـ ٥) :

الجدول التالي يوضح حجم الاستثمارات في قطاع معيّن في الفترة من ١٩٧٨ ـ ١٩٨٧ مقربة بالمليون جنيه والمطلوب ايجاد معادلة الاتجاه العام ثم أوجد القيم الاتجاهية ومن ثم حدد أثر التغيرات الموسمية والعشوائية والدورية .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	المجموع
الاستثمار	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠	٩٨	٨٦	١٠٣	١٠٨	٩٠٠

الحـــل : بأخذ سنة الأساس في منتصف سنة ١٩٨٣/٨٢ والضرب من (٢) نحصل على قيم س من الجدول التالي :

السنوات	الاستثمار ص	س	س ص	$س^2$	القيم الاتجاهية صَ	اثر الموسم والعشوائية والدورية
١٩٧٨	٦٨	-٩	-٦١٢	٨١	٦٩,٩٣	٩٧,٢٤
١٩٧٩	٥٠	-٧	-٣٥٠	٤٩	٧٤,٣٩	٦٧,٢١
١٩٨٠	٨١	-٥	-٤٠٥	٢٥	٧٨,٨٥	١٠٢,٧٣
١٩٨١	١٠٥	-٣	-٣١٥	٩	٨٣,٣١	١٢٦,٠٤
١٩٨٢	١٠٠	-١	-١٠٠	١	٨٧,٧٧	١١٣,٩٣
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	١	٩٢,٢٣	١٠٩,٥١
١٩٨٤	٩٨	٣	٢٩٤	٩	٩٦,٦٩	١٠١,٣٥
١٩٨٥	٨٦	٥	٤٣٠	٢٥	١٠١,١٥	٨٥,٠٢
١٩٨٦	١٠٣	٧	٧٢١	٤٩	١٠٥,٦١	٩٧,٥٣
١٩٨٧	١٠٨	٩	٩٧٢	٨١	١١٠,٠٧	٩٨,١٢
المجموع	٩٠٠	صفر	٧٣٦	٣٣٠		

$$ب = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^2} = \frac{٧٣٦}{٣٣٠} = ٢,٢٣$$

$$أ = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٩٠٠}{١٠} = ٩٠$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :

صَ = أ + ب س

صَ = ٩٠ + ٢,٢٣ س

ملاحظة : اثر التغيرات الموسمية والعشوائية والدورية

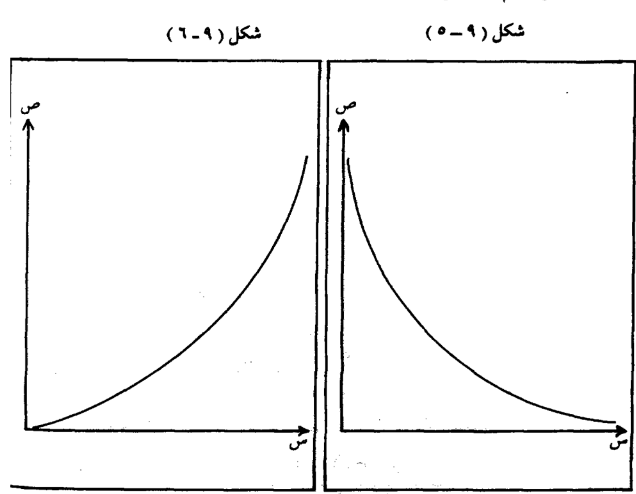
$$= \frac{القيم\ الأصلية\ ص}{القيم\ الاتجاهية\ صَ} \times ١٠٠$$

الاتجاه العام في صورة دالة أسية (باستخدام طريقة المربعات الصغرى) :

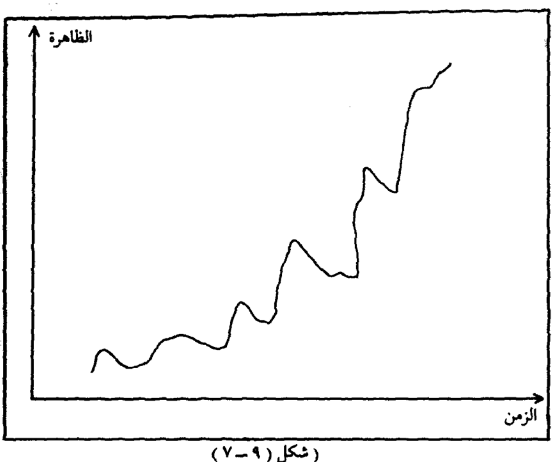
تستخدم الدالة الاسية كمنحنى انحدار بين المتغير المستقل (س) والمتغير التابع (ص) إذا كان الاتجاه العام ينمو بنسبة ثابتة لكل قيم المتغير المستقل (مثلاً ٢٠٪ كل سنة) فإذا كانت القيمة ١٠٠ في السنة الأولى ، ففي السنة الثانية ١٠٠ + (١٠٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$) = ١٢٠ وفي السنة الثالثة ١٢٠ + ١٢٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ١٢٠ + ٢٤ = ١٤٤ . . . وهكذا ، فالفرق بين السنة الثانية والأولى : ١٢٠ - ١٠٠ = ٢٠ ، وبين السنة الثالثة والثانية ١٤٤ - ١٢٠ = ٢٤ ، وهكذا الفرق يزداد أو ينقص على حسب اتجاه التغيير في الاتجاه العام . ولكن الفرق لا يكون ثابتاً كما هو الحال في خط الانحدار الخطي .

والشكل العام لمنحنى الدالة الأسية يأخذ أحد الشكلين الآتيين :

شكل (٩ ــ ٥) شكل (٩ ـ ٦)



وتأخذ السلسلة الزمنية التي يأخذ الاتجاه العام فيها شكل الدالة الأسية شكلاً كالآتي :



(شكل (٩ ــ ٧)

الصورة العامة للدالة الاسية :

ص = أ (ب)^س

ويمكن كتابتها على صورة خطية بأخذ لوغارتم الطرفين كالتالي :

لو١٠ ص = لو١٠ أ + س (لو١٠ ب)

وبوضع ص/ = لو١٠ ص ، أ/ = لو١٠ أ ، ب/ = لو١٠ ب . يمكن كتابة المعادلة على الصورة الخطية المعروفة :

ص/ = أ/ + ب/ س

حيث (أ/ ، ب/) ، لهما نفس المعنى الذي ذكرناه عند كلامنا عن خط انحدار (ص) على (س) .

ومن ثم نستطيع ايجاد (أ/) و (ب/) باستخدام طريقة المربعات الصغرى والبيانات المتوفرة عن (ص/) و (س/) . ولإيجاد قيمة (أ) من (أ/) و (ب) من (ب/) نستخدم العلاقة : أ = $١٠^{أ/}$ ، ب = $١٠^{ب/}$

(مثال (٩ ـ ٦) :

الأرقام التالية تمثل الانتاج الكلي لإحدى المصانع مقاساً بالألف وحدة .

السنة (س)	وحدة الانتاج (ص)	لو١٠ ص = ص/
١٩٧١	٢١٠	٢,٣٢٢٢
١٩٧٢	٢٥٠	٢,٣٩٧٩
١٩٧٣	٢٦٠	٢,٤١٥٠
١٩٧٤	٢٤٠	٢,٣٨٠٢
١٩٧٥	٣٠٠	٢,٤٧٧١
١٩٧٦	٣١٠	٢,٤٩١٤
١٩٧٧	٣٣٠	٢,٥١٨٥
١٩٧٨	٣٨٠	٢,٥٧٩٨
١٩٧٩	٤٧٠	٢,٦٧٢١
١٩٨٠	٥٣٠	٢,٧٢٤٣
١٩٨١	٥٦٠	٢,٧٤٨٢

والمطلوب :

١) ايجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي على الصورة ص = أ $ب^{س}$

٢) استخدام المعادلة في تقدير قيمة الانتاج الكلي سنة ١٩٧٥ ثم حدد مقدار الخطأ في التقدير .

الحـــل :

مجـ س = ٢١٧٣٦ مجـ س^{٢} = ٤٢٩٥٠٤٤٦

مجـ ص/ = مجـ (لو١٠ ص) = ٢٧,٧٢٦٧ مجـ ص/^{٢} = مجـ (لو١٠ ص)^{٢} = ٧٠,٠٩٥٩

مجـ س ص/ = ٥٤٧٩٢,٥٧٨٩ ص/ = ٢,٥٢٠٦ ، س = ١٩٧٦

ب/ = $\frac{\text{ن مجـ س ص/ - (مجـ س) (مجـ ص/)}}{\text{ن مجـ س}^{٢} \text{ - (مجـ س)}^{٢}}$ = ,٠٤٢٢٠

أ/ = ص/ - ب س = - ٨٠,٩٥٧٨

أ = (١٠)$^{-٨٠,٩٥٨}$ = ١,١٠٢٠ × ١٠$^{-٨١}$

ب = ١,١٠٢٢

∴ ض/ = ٠٤٢٢, س - ٨٠,٩٥٨٢

أو

ض = (١,١٠٢٠ × ١٠$^{-٨١}$) (١,١٠٢٢)^{س}

لإيجاد قيمة (ص) المتنبأ بها لسنة ١٩٧٥ مثلاً .

ض/ = ٠,٠٤٢٢ (١٩٧٥) - ٨٠,٩٥٧٨

= ٨٣,٤٣٦٢ - ٨٠,٩٥٧٨ = ٢,٤٧٨٤

∴ ض = ١٠^{٢,٤٧٨٤} = ٣٠٠,٨٥٨١

وحيث أن القيمة الأصلية للانتاج الكلي سنة ١٩٧٥ = ٣٠٠

∴ مقـدار الخطأ في التقـدير = القيمـة الأصليـة - القيمـة المقـدرة

= - ,٨٥٨١

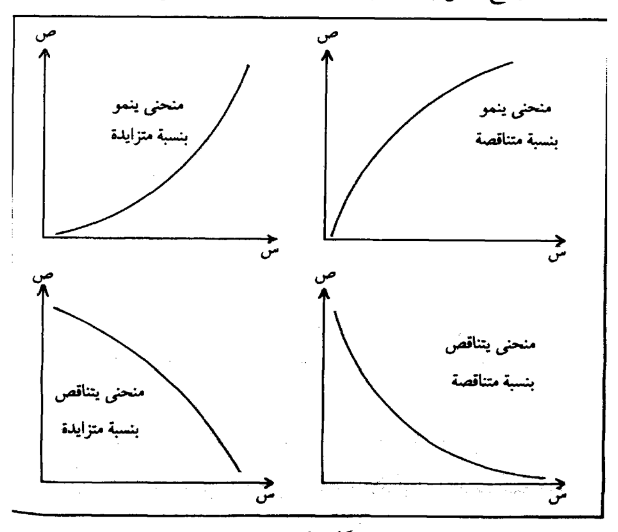
الاتجاه العام كمعادلة من الدرجة الثانية - طريقة المربعات الصغرى :

في بعض التـطبيقات لا يمكن افتـراض معادلـة الخط المستقيم لتمثيـل الاتجـاه العام للظاهـرة ولذلـك فمن الضروري استخـدام معادلـة المنحنى من الدرجة الثانية أو الثالثة أو . . . . لوصف بيانات مثل هذه الظواهر .

وسـوف يقتصـر تحليلنـا في هـذا المجـال على المنحنى من الـدرجـة الثانية . فمن المعلوم أن الصورة العامـة لمعادلـة المنحنى من الدرجـة الثانيـة هي :

ص = أ + ب س + جـ $س^{٢}$ (٩ ــ ٨)

ويوضح شكل (٩ ــ ٨) أشكالاً مختلفة لمنحنيات من الدرجة الثانية .



شكل (٩ ــ ٨)

وواضح انها معادلة في ثلاثة مجاهيل ، ولكي نحصل على تقدير أ ، بَ ، جـ فيلزم حل المعادلات الآتية :

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س + جـ مجـ س^{٢}

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س^{٢} + جـ مجـ س^{٣} (٩ ـ ٩)

مجـ س^{٢} ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س^{٣} + جـ مجـ س^{٤}

وباستخدام الطريقة المختزلة السابق شرحها (بجعل مجـ س = صفر) يمكن تقليل العمليات الحسابية وتصبح المعادلات السابقة على الصورة .

مجـ ص = ن أ + جـ مجـ س^{٢}

مجـ س ص = ب مجـ س^{٢} (٩ ـ ١٠)

مجـ س^{٢} ص = أ مجـ س^{٢} + جـ مجـ س^{٤}

وعليه لحل هذه المعادلات يلزم ايجاد مجـ ص ، مجـ س^{٢} ص ، مجـ س ص ، مجـ س^{٢} ، مجـ س^{٤} كما يتضح في المثال التالي :

مثال (٩ ـ ٧) :

الجدول التالي يوضح حجم الاستثمارات بالمليون جنيه في قطاع معيّن في الملة من ١٩٧٨ إلى ١٩٨٦ والمطلوب تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض منحنى من الدرجة الثانية . ثم حدد القيم الاتجاهية .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
الاستثمارات	٦٨	٥٠	٨١	١٠٥	١٠٠	١٠١	٩٨	٨٦	١٠٣

الحـــل :

السنوات	الاستثمارات ص	س	س ص	$س^2$	$س^2ص$	$س^4$	القيم الاتجاهية $\hat{ص}$
١٩٧٨	٦٨	-٤	-٢٧٢	١٦	١٠٨٨	٢٥٦	٥٧,٤٤
١٩٧٩	٥٠	-٣	-١٥٠	٩	٤٥٠	٨١	٧١,١٠
١٩٨٠	٨١	-٢	-١٦٢	٤	٣٢٤	١٦	٨٢,١٨
١٩٨١	١٠٥	-١	-١٠٥	١	١٠٥	١	٩٠,٦٨
١٩٨٢	١٠٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٩٦,٦٠
١٩٨٣	١٠١	١	١٠١	١	١٠١	١	٩٩,٩٤
١٩٨٤	٩٨	٢	١٩٦	٤	٣٩٢	١٦	١٠٠,٧٠
١٩٨٥	٨٦	٣	٢٥٨	٩	٧٧٤	٨١	٩٨,٨٨
١٩٨٦	١٠٣	٤	٤١٢	١٦	١٦٤٨	٢٥٦	٩٤,٤٨
المجموع	٧٩٢	صفر	٢٧٨	٦٠	٤٨٨٢	٧٠٨	

بالتعويض في المعادلات (٩ ــ ١٠) نحصل على

$$ب = \frac{مجـ\ س\ ص}{مجـ\ س^2} = \frac{٢٧٨}{٦٠} = ٤,٦٣$$

$$٧٩٢ = ٩\ أ + ٦٠\ جـ \qquad (١)$$

$$٤٨٨٢ = ٦٠أ + ٧٠٨\ جـ \qquad (٢)$$

وبحل المعادلتين في (أ ، جـ) نجد من (١) أن :

$$أ = ٨٨ - \frac{٢٠}{٣}\ جـ \qquad (٣)$$

وبالتعويض في (٢)

$$٤٨٨٢ = ٥٢٨٠ - ٤٠٠\ جـ + ٧٠٨\ جـ$$

$$٣٠٨\ جـ = - ٣٩٨$$

$$\therefore جـ = - ١,٢٩$$

وبالتعويض في (٣) نجد أن : أ = ٩٦,٦

∴ معـادلـة الاتجـاه العـام هي :

ص̂ = ٩٦,٦ + ٤,٦٣ س - ١,٢٩ س^{٢}

وبـالتعـويض عن قيم (س) نحصـل على القيم الاتجـاهيـة في العمـود الأخير بالجدول .

(٤) المتوسطات المتحركة :

تمهيـد :

الـوسط الحسابي لعـدة قيم هي القيمة النـاشئة من قسمـة مجموع هـذه القـيم عـلى عددها ، وهي قيمة تلخص البيانات برقم واحد وتزيل التذبذبات الناشئة فيها ، فمثلاً إذا كانت لدينا البيانات التالية : ـ

س = ٥١ ، ٣ ، ١١٠

الوسط الحسابي = $\frac{١٦٤}{٣}$ = ٥٤,٦٧

لذلك فإننا نستخدم الوسط الحسابي في طريقـة المتوسـطات المتحركـة لإزالة المرتفعـات والمنخفضات (النـاشئة من التغيـرات الموسميـة والعرضيـة والدورية) من السلسلة الزمنية ، والحصول على سلسلة زمنية جديدة خالية من التغيرات السابقة .

تعريف المتوسطات المتحركة :

المتـوسـطات المتحـركـة لسلسلة زمنيـــة هي سلسلة زمنيـة مشتقــة من السلسلة الـزمنيـة الأصليـة ، حيث تكـون القيمـة لفتـرة زمنيـة معيّنـة في هـذه السلسلة مساوية للوسط الحسابي للقيمة المناظرة في السلسلة الأصليـة وبعض القيم الأصلية السابقة واللاحقة لها .

وتستخدم هذه الطريقة لإزالة التغيرات الموسمية والعرضية والدورية والحصول على سلسلة زمنية تحتوي على اتجاه عام فقط ولكن ليس بالضرورة أن يكون في صورة خطية .

لذلك فإن هذه الطريقة لا تحدد لنا الاتجاه العام بصورة علاقة رياضية يمكن استخدامها فيما بعد في التنبؤ ولكن الذي نحصل عليه هو سلسلة تحتوي على هذا المتغير فقط .

لحساب المتوسطات المتحركة نبدأ أولاً بتحديد الفترة المناسبة لأخذ متوسطات البيانات ، وهذه تعتمد على طول دورة المتغير المراد إزالتها وعلى طول الفترة المقاسة فيها البيانات الأصلية . فلإزالة المتغيرات الموسمية والمتغيرات العشوائية من سلسلة زمنية مقاسة بالأشهر فمن الممكن أن تكون فترة المتوسطات ١٢ شهراً مثلاً وإذا كانت البيانات مقاسة ربع سنوياً فمن الممكن أن يكون طول الفترة أربعة أرباع سنوية وهكذا ، وذلك لأن المتغيرات الموسمية تحدث خلال فترة زمنية مقدارها في العادة سنة . أما المتغيرات الدورية فطول فترة دورتها تكون في العادة أكبر من سنة وتعتمد على نوع الظاهرة المدروسة ، لذلك يجب أن نجرب عدة فترات ونختار أنسب الأطوال لإزالة المتغيرات الدورية ، (وعند إزالة المتغيرات الدورية بطريقة المتوسطات المتحركة تزال التغيرات الموسمية والعرضية معها تلقائياً) ، وطول هذه الفترات يعتمد كما ذكرنا سابقاً على طول فترة قياس البيانات الأصلية وعلى طول الدورة الاقتصادية للظاهرة المدروسة .

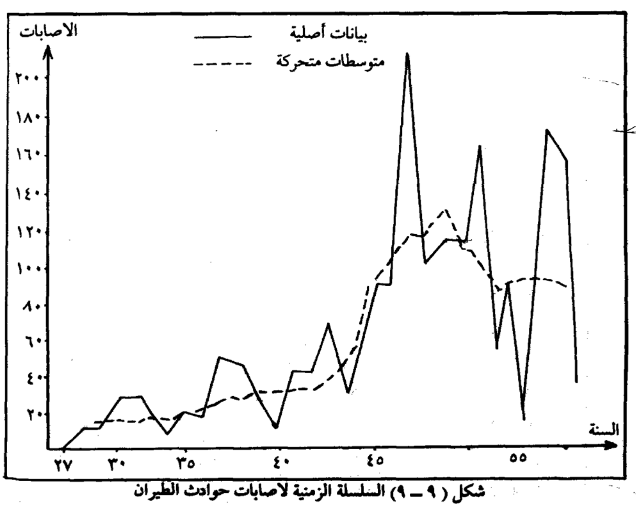
بعد تحديد طول الفترة المناسبة للمتوسطات المتحركة (وليكن طولها ن) نبدأ بحساب المتوسط المتحرك المقابل لكل فترة زمنية من فترات السلسلة وذلك بحساب متوسط فترة من السلسلة الأصلية يكون مركزها الفترة الزمنية المعنية .

مثال (٩ ــ ٨) :

الجدول التالي يمثل عدد اصابات المسافرين بالطائرات في إحدى الدول ، والمتوسط المتحرك لخمس سنوات .

السنة	اصابات حوادث الطيران	مجموع متحرك لخمس سنوات	متوسط متحرك لخمس سنوات
١٩٢٧	١	ــ	ــ
١٩٢٨	١٤	ــ	ــ
١٩٢٩	١٤	٧٨	١٥,٦
١٩٣٠	٢٤	٩٦	١٩,٢
١٩٣١	٢٥	٩٠	١٨,٠
١٩٣٢	١٩	٩٣	١٨,٦
١٩٣٣	٨	٨٤	١٦,٨
١٩٣٤	١٧	١٠٣	٢٠,٦
١٩٣٥	١٥	١٢٤	٢٤,٨
١٩٣٦	٤٤	١٤١	٢٨,٢
١٩٣٧	٤٠	١٣٣	٢٦,٦
١٩٣٨	٢٥	١٥٣	٣٠,٦
١٩٣٩	٩	١٤٤	٢٨,٨
١٩٤٠	٣٥	١٥٩	٣١,٨
١٩٤١	٣٥	١٥٦	٣١,٢
١٩٤٢	٥٥	١٩٥	٣٩,٠
١٩٤٣	٢٢	٢٣٦	٤٧,٢
١٩٤٤	٤٨	٢٧٦	٥٥,٢
١٩٤٥	٧٦	٤٢٠	٨٤,٠
١٩٤٦	٧٥	٤٨١	٩٦,٢
١٩٤٧	١٩٩	٥٢٩	١٠٥,٨
١٩٤٨	٨٣	٥٤٩	١٠٩,٨

السنة	اصابات حوادث الطيران	مجموع متحرك لخمس سنوات	متوسط متحرك لخمس سنوات
١٩٤٩	٩٦	٦١٦	١٢٣,٢
١٩٥٠	٩٦	٤٦٣	٩٢,٦
١٩٥١	١٤٢	٤٦٦	٩٣,٢
١٩٥٢	٤٦	٣٨٦	٧٧,٢
١٩٥٣	٨٦	٤٤٦	٨٩,٢
١٩٥٤	١٦	٤٤٧	٨٩,٤
١٩٥٥	١٥٦	٤٣٣	٨٦,٦
١٩٥٦	١٤٣	—	—
١٩٥٧	٣٢	—	—



شكل (٩ ــ ٩) السلسلة الزمنية لاصابات حوادث الطيران
مع سلسلة المتوسطات المتحركة بخمس سنوات .

فإذا قررنا أن أنسب طول لحساب المتوسطات المتحركة هو ٥ (خمس سنوات هنا) فلحساب المتوسط المتحرك لسنة ١٩٢٩ نجمع بيانات السنوات ١٩٢٧ ــ ١٩٣١ ثم نقسمها على ٥ أي أن :

المتوسط المتحرك = $\frac{١ + ١٤ + ١٤ + ٢٤ + ٢٥}{٥}$ = $\frac{٧٨}{٥}$ = ١٥,٦

يكون مركزها سنة ١٩٢٩ (السنة المتوسطة) ، ولسنة ١٩٣٠ نحسب المجموع المتحرك وذلك بطرح القيمة المقابلة لسنة ١٩٢٧ من المجموع المتحرك السابق (٧٨) ثم نضيف إليه القيمة المقابلة للسنة التالية (١٩٣٢) وهي ١٩ لنحصل على المجموع المتحرك التالي ويساوي ٩٦ وبذلك فإن المتوسط المتحرك الجديد يساوي $\frac{٩٦}{٥}$ = ١٩,٢ ومركزه سنة ١٩٣٠ (السنة الوسطىٰ بين ١٩٢٨ - ١٩٣٢) وهكذا .

وبالنسبة لسنة ١٩٢٧ ، وسنة ١٩٢٨ في البداية وسنتي ١٩٥٦ ، ١٩٥٧ في نهاية السلسلة لا نستطيع حساب متوسط متحرك لهم وذلك لعدم وجود خمس قيم يكون مركزها السنة المطلوبة .

لذلك فإنه باستخدام هذه الطريقة نفقد بعض المعلومات عن بعض السنوات (تعتمد في عددها على طول فترة المتوسطات المتحركة) .

القيمة الناشئة في السلسلة الجديدة (سلسلة المتوسطات المتحركة) هي سلسلة للقيمة الاتجاهية بعد إزالة كل من التغيرات الموسمية ، العرضية والدورية .

طول فترة المتوسطات المتحركة إذا كان زوجياً :

إذا كان طول فترة المتوسطات المتحركة زوجياً كأن يكون ٤ في مثالنا السابق فإن المتوسط المتحرك لأربع سنوات (أو أي قيمة زوجية) تكون قيمة تقع بين سنتين في المركز لذلك نأخذ المتوسط الحسابي لوسطين متحركين ثم نضعه أمام السنة التي تكون مركز هاتين القيمتين .

السنة	القيم	مجموع متحرك لأربع سنوات	المتوسط المتحرك (غير المركزي)	المتوسط المتحرك (المركزي)
١٩٢٧	١			—
١٩٢٨	١٤			—
		٥٣	١٣,٢٥	١٦,٢٥ = ٣٢,٥ / ٢
١٩٢٩	١٤			
		٧٧	١٩,٢٥	١٩,٨٨ = ٣٩,٧٥ / ٢
١٩٣٠	٢٤			
		٨٢	٢٠,٥٠	
١٩٣١	٢٥			—
١٩٣٢	١٩			—

وهكـــذا. . . . .

وطريقة المتـوسطات المتحـركة على الـرغم من أنها مفيـدة تحت بعض الشـروط إلاَّ أنها تحمـل بعض العيوب منهـا فقد بعض القيم في بـداية ونهـاية سلسلة المتوسطات المتحركة وانها تحتاج إلى عمليات حسابية طويلة وأهم من ذلك أنها لا تعطي الاتجاه العام في صورة معادلة رياضية يمكن استخدامها في عمليـات التنبؤ المستقبلي. ولكننا درسنـا هذه الـطريقـة لأهميتهـا في حسـاب بعض الـطرق الحسابيـة في تقديـر بعض المكـونـات الأخـرى في السـلاسـل الزمنية .

تخليص السلسلة الزمنية من أثر الاتجاه العام :

بعد أن أوجدنا تقديراً للاتجاه العام لكل فترة زمنيـة في السلسلة الأصلية يمكن إزالـة أثر الاتجـاه العـام من هـذه السلسلة وذلـك بقسمـة السلسلة على القيمة الاتجاهية التي حصلنا عليها { على افتراض أن النموذج الذي لدينا هـو

نمــوذج الضــرب أي أن (ص = ت × م × د × ع) } فنحـصــل على أثــر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية

$$= \frac{ت \times م \times د \times ع}{ت} = م \times د \times ع$$

وهي سلسلة مكونة من التغيرات الموسمية والعرضية والدورية .

فمثـلاً لسنة ١٩٢٩ في مثـال (٩ ــ ٨) نجد أن

أثـر التغيرات المـوسمية والدورية والعرضية = $\frac{١٤}{١٥,٦}$ = ٠,٩٠ .

وهـذا يعني أن التغيرات الـدورية والمـوسمية والعـرضية معـاً تقلل قيمة الاتجاه بمقدار ١٠٪ أو أن القيمة الفعلية هي ٩٠٪ من القيمة الاتجاهيـة وذلك لأثر المكونات الثلاثة الأخرى (القيمة الاتجاهية محسوبة بطريقـة المتوسـطات المتحركة) .

ولسنة ١٩٣٠ نجد أن أثر التغيرات الثلاثة = $\frac{٢٤}{١٩,٢}$ = ١,٢٥
وتعني أن التغيرات الثلاثة زادت من اثر الاتجاه العام بمقدار ٢٥٪. وهكذا .

ثانياً : قياس التغيرات الموسمية

(Measuring Seasonal Variation)

هناك عدة طرق لقياس التغيرات الموسمية من أهمها : ــ

(١) طريقة المتوسطات البسيطة .

(٢) طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة .

(١) طريقة المتوسطات البسيطة :

وتتلخص هذه الطريقة في ايجاد الوسط الحسابي للفترات الموسمية في كل السنوات ومن الوسط الحسابي لكل فترة موسمية نوجد الوسط الحسابي العام لجميع الفترات ومن ثم نوجد الرقم القياسي الموسمي (والذي يعبّر عن نسبة الزيادة أو النقصان في الاتجاه العام نتيجة للمتغيرات الموسمية) وذلك بنسبة متوسط كل فترة إلى المتوسط العام ، وبذلك فإن الوسط الحسابي للأرقام القياسية الموسمية يكون واحداً صحيحاً (أو ١٠٠ ان كان في صورة نسبة) أي أن محصلة التغيرات الموسمية تتلاشى في آخرها في المحصلة العامة السنوية . فمثلاً إذا كانت البيانات ربع سنوية فيمكن حساب الرقم القياسي الموسمي لكل موسم باتباع الخطوات الآتية : ـــ

١ ـــ نوجد المجموع السنوي لكل ربع من الأرباع (المجموع السنوي يعني مجموع الأرباع المتناظرة في السنوات المختلفة).

٢ ـــ نوجد الوسط الحسابي لكل ربع من الأرباع .

٣ ـــ حساب الوسط الحسابي العام والذي يحسب كوسط حسابي لمتوسطات الأرباع .

٤ ـــ يحسب الرقم القياسي الربع سنوي على أساس نسبة متوسط كل ربع إلى متوسط المتوسطات (الوسط العام) ويسمى هذا الرقم بالدليل الموسمي ، ويكون في صورة نسبة مئوية .

مثال (٩ ـــ ٩) :

البيانات الآتية تمثل المبيعات الربع سنوية لإحدى المؤسسات مقاسة بالألف دينار والمطلوب حساب الرقم القياسي الموسمي بطريقة المتوسطات البسيطة .

السنة \ الربع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
١٩٧٨	٤٧,٢٥	٥٧,٧٥	٤٥,٥	٣٥
١٩٧٩	٤٦,٨	٦١,٢	٤٥	٣٧,٨
١٩٨٠	٤٣,٧	٥٧	٤٧,٥	٣٤,٢
١٩٨١	٥٠,٤	٦٧,٢	٥٠,٤	٣٥,٧
١٩٨٢	٦٤,٨	٧٦,٨	٥٧,٦	٤٨
المجموع	٢٥٢,٩٥	٣١٩,٩٥	٢٤٦	١٩٠,٧
المتوسط	٥٠,٥٩	٦٣,٩٩	٤٩,٢	٣٨,١٤
الرقم القياسي الموسمي	١	١,٢٧	٠,٩٧	٠,٧٦

المتوسط العام = $\frac{٣٨,١٤ + ٤٩,٢ + ٦٣,٩٩ + ٥٠,٥٩}{٤}$

= $\frac{٢٠١,٩٢}{٤}$ = ٥٠,٤٨

الرقم الموسمي للربع الأول = $\frac{٥٠,٥٩}{٥٠,٤٨}$ = ١,٠٠٢

الرقم الموسمي للربع الثاني = $\frac{٦٣,٩٩}{٥٠,٤٨}$ = ١,٢٧

الرقم الموسمي للربع الثالث = $\frac{٤٩,٢}{٥٠,٤٨}$ = ٠,٩٧

الرقم الموسمي للربع الرابع = $\frac{٣٨,١٤}{٥٠,٤٨}$ = ٠,٧٦

ويعني الرقم الموسمي للربع الثاني مثلاً أن مبيعات هـذه المؤسسة تتـأثر بموسمية تؤدي إلى زيادة المبيعات بمقـدار ٢٧٪ من القيمة الاتجـاهية . بينمـا في الربع الثالث تؤدي الموسمية إلى انخفاض في القيمة الاتجاهية قدره ٣٪ .

ملاحظـة :

$$\text{متوسط الأرقام الموسمية} = \frac{١ + ١,٢٧ + ٠,٩٧ + ٠,٧٦}{٤} = ١$$

ويعني هذا أن الموسمية يتلاشى أثرها خـلال السنة وتعـود لتكرر نفسهـا مرة أخرى في السنـوات الأخرى . أو أن محصلة أثـر الموسميـة يُبطل بعضهـا البعض خلال مرور السنة .

(٢) طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة :

تعتبر طريقة تقديـر الموسميـة بنسبة القيم الأصليـة للسلسلة الزمنيـة إلى متوسطاتها المتحركة أفضل وأكثر الطرق البسيطة استخداماً في هذا المجـال . فإذا كانت لدينا سلسلة زمنية مقاسة بفترات زمنية أقل من سنـة كأن تكـون هذه الفترات « أيام ، أسابيع ، أشهر، أرباع سنـة (٣ أشهر) وهكـذا. . . . . » فإن التغيرات الموسمية تظهر في هذه السلسلة وتؤثر عليها . لقياس تأثيـر التغيرات المـوسمية في مثـل هذه السلسلة نلجـأ أولاً إلى تخليص هذه السلسلة من أثـر المتغيرات الموسمية باستخدام المتوسطات المتحركة (بفترة زمنية تساوي سنـة من أطوال الفترات للسلسلة الأصلية)، وبإزالة هذا المتغير بالمتـوسطات تـزال كذلك التغيرات العشوائية لنحصل على سلسلة زمنيـة بالمتـوسطات المتحـركة والتي تشمل أثر متغيرين هما الاتجاه العام والتغيرات الدورية .

وبفـرض اننا نتعـامل مـع نموذج الضـرب (الأكثـر شيـوعـاً) فـإن قسمـة السلسلة الأصليـة على سلسلة المتوسـطات المتحركـة تعـطينـا سلسلة أخـرى

جديدة خالية من أثر الاتجاه العام والتغيرات الدورية وتشمل أثر متغيرين فقط هما التغيرات الموسمية والتغيرات العشوائية .

ولتقدير أثر الموسمية في هذه السلسلة نلجأ إلى أخذ الوسط الحسابي للقيم المتناظرة (في الفترة الزمنية خلال السنة) من السلسلة الجديدة ، لنحصل بذلك على تقدير لأثر الموسمية في هذا الفصل من السنة . يكون هذا التقدير في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام . ولأن أثر التغيرات الموسمية يتلاشى في المحصلة السنوية لذلك فإن مجموع أثر الموسمية يجب أن يكون مساوياً لعدد الفترات الموسمية ، أو بمعنى آخر ان متوسط مجموع أثر الموسمية خلال سنة يجب أن يكون واحداً صحيحاً .

لهذا فالحصول على الرقم القياسي الموسمي (الدليل الموسمي) لكل موسم نقسم الأثر الموسمي لكل فصل على مجموع أثر الفصول خلال سنة .

نموذج الضرب : ص = ت × م × د × ع

سلسلة المتوسطات المتحركة : صَ = ت × د

حاصل قسمة السلسلة الأصلية على سلسلة المتوسطات المتحركة : —

$$ص'' = \frac{ت \times م \times د \times ع}{ت \times د} = م \times ع$$

مثال (٩ — ١٠) :

من بيانات المثال السابق للمبيعات الربع سنوية لإحدى المؤسسات مقاسة بالألف دينار .

أوجد الرقم القياسي الموسمي باستخدام طريقة نسبة القيم الأصلية إلى المتوسطات المتحركة .

الحـــل : الجدول التالي يلخص خطوات الحل :

السنة	الربع	(س)	(ص) المبيعات	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك	ت × د المتوسط المتحرك المركز	م × ع = القيم الأصلية / المتوسط المتحرك
١٩٧٨	١	١	٤٧,٢٥				–
	٢	٢	٥٧,٧٥				–
				١٨٥,٥	٤٦,٣٧٥		
	٣	٣	٤٥,٥			٤٦,٣١٨٨	٠,٩٨٢٣
				١٨٥,٠٥	٤٦,٢٦٢٥		
	٤	٤	٣٥,٠٠			٤٦,٦٩٣٨	٠,٧٤٩٦
				١٨٨,٥	٤٧,١٢٥		
١٩٧٩	١	٥	٤٦,٨			٤٧,٠٦٢٥	٠,٩٩٤٤
				١٨٨	٤٧,٠٠		
	٢	٦	٦١,٢			٤٧,٣٥	١,٢٩٢٥
				١٩٠,٨	٤٧,٧٠		
	٣	٧	٤٥,٠٠			٤٧,٣١٢٥	٠,٩٥١١
				١٨٧,٧	٤٦,٩٢٥		
	٤	٨	٣٧,٨			٤٦,٤	٠,٨١٤٧
				١٨٣,٥	٤٥,٨٧٥		
١٩٨٠	١	٩	٤٣,٧			٤٦,١٨٧٥	٠,٩٤٦١
				١٨٦,٠٠	٤٦,٥٠		
	٢	١٠	٥٧,٠٠			٤٦,٠٥	١,٢٣٧٨
				١٨٢,٤٠	٤٥,٦٠		
	٣	١١	٤٧,٥			٤٦,٤٣٧٥	١,٠٠٢٩
				١٨٩,١٠	٤٧,٢٧٥		

السنة	الربع	(س)	(ص) المبيعات	المجموع المتحرك	المتوسط المتحرك	ت × د المتوسط المتحرك الممركز	م × ع القيم الأصلية / المتوسط المتحرك
	٤	١٢	٣٤,٢			٤٨,٥٥	٠,٧٠٤٤
				١٩٩,٣٠	٤٩,٨٢٥		
١٩٨١	١	١٣	٥٠,٤			٥٠,١٨٧٥	١,٠٠٤٢
				٢٠٢,٢	٥٠,٥٥		
	٢	١٤	٦٧,٢			٥٠,٧٣٧٥	١,٣٢٤٥
				٢٠٣,٧٠	٥٠,٩٢٥		
	٣	١٥	٥٠,٤			٥٢,٧٢٥	٠,٩٥٥٩
				٢١٨,١	٥٤,٥٢٥		
	٤	١٦	٣٥,٧			٥٥,٧٢٥	٠,٦٤٠٦
				٢٢٧,٧	٥٦,٩٢٥		
١٩٨٢	١	١٧	٦٤,٨			٥٧,٨٢٥	١,١٢٠٦
				٢٣٤,٩٠	٥٨,٧٢٥		
	٢	١٨	٧٦,٨			٦٠,٢٦٢٥	١,٢٧٤٤
				٢٤٧,٢	٦١,٨٠		
	٣	١٩	٥٧,٦				–
	٤	٢٠	٤٨,٠٠				–

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي : ـ

الربع / السنة	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢
الأول	—	,٩٩٤٤	,٩٤٦١	١,٠٠٤٢	١,١٢٠٦
الثاني	—	١,٢٩٢٥	١,٢٣٧٨	١,٣٢٤٥	١,٢٧٤٤
الثالث	,٩٨٢٣	,٩٥١١	١,٠٠٢٩	٠,٩٥٥٩	—
الرابع	٠,٧٤٩٦	,٨١٤٧	٠,٧٠٤٤	,٦٤٠٦	—

ولحساب الرقم القياسي الموسمي نحسب المتوسط في كل ربع ثم نحسب المتوسط العام للأرباع ومن ثم ننسب متوسط كل ربع إلى متوسط المتوسطات كما يلي :

	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
المجموع	٤,٠٦٥٣	٥,١٢٩٢	٣,٨٩٢٢	٢,٩٠٩٣
المتوسط	١,٠١٦٣	١,٢٨٢٣	٠,٩٧٣١	٠,٧٢٧٣
الرقم القياسي الموسمي	١٠١,٦٥	١٢٨,٢٦	٩٧,٣٣	٧٢,٧٥

حيث :

* متوسط متوسطات الأرباع = $\frac{\text{٣,٩٩٩}}{\text{٤}}$ = ٠,٩٩٩٨

* الرقم القياسي الموسمي = $\frac{\text{متوسط الربع}}{\text{متوسط المتوسطات}} \times$ ١٠٠

ملاحظة :

لمعرفة جدوى حساب الرقم القياسي الموسمي في المثال السابق نوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س) باستخدام طريقة المربعات الصغرى .

حيث :

مجـ س = ٢١٠ ، مجـ س^2 = ٢٨٧٠ ، مجـ س ص = ١١٠١٥,٦٥

مجـ ص = ١٠٠٩,٦ ، مجـ ص^2 = ٥٣٤٢٦,٦٦٥ ، ن = ٢٠

ويمكن للقارىء أن يحصل على معادلة خط انحدار (ص) على (س) في الصورة :

صْ = ٤٣,٩٢٩٧ + ,٦٢٣٨ س

وللتنبؤ بقيمة المبيعات في الربع الثاني لسنة ١٩٨١ نجد أنه يقابلها س = ١٤ ومن ثم نجد أن :

صْ = ٤٣,٩٢٩٧ + ,٦٢٣٨ × ١٤ = ٥٢,٦٦٣٤

أما إذا أضفنا أثر الموسم فإن تقدير قيمة المبيعات في الربع الثاني لسنة ١٩٨١ يصبح :

ص = ٥٢,٦٦٣٤ × ١,٢٨٢٣ = ٦٧,٥٣

وهي أقرب إلى القيمة الحقيقية للمبيعات وهي ٦٧,٢ .

استبعاد أثر التغيرات الموسمية من السلسلة الزمنية :

لاستبعاد أثر التغيرات الموسمية في سلسلة زمنية تتبع نموذج الضرب نقوم بقسمة القيم الأصلية للسلسلة على الرقم القياسي الموسمي المناظر لكل فترة فنحصل على قيم جديدة تحتوي على اثر المتغيرات طويلة الأجل

(الاتجاه العام) والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية ، وباستبعاد أثر الاتجاه العام كما سبق يمكن الحصول على سلسلة زمنية تحتوي على أثر كل من التغيرات الدورية والتغيرات العشوائية . وهذه السلسلة تساعدنا في دراسة أثر التغيرات الدورية .

ثالثاً : قياس التغيرات الدورية :

من الطرق التقليدية لقياس أثر التغيرات الدورية الطريقة التي يتم بموجبها استبعاد أثر كل من التغيرات الموسمية والتغيرات طويلة الأجل من السلسلة الزمنية (كما سبق ذكره) والحصول على سلسلة زمنية بأثر المتغيرات الدورية والعشوائية في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام (نموذج الضرب) ، ثم بعد ذلك نوجد متوسطاً متحركاً لهذه السلسلة من النسب اعتماداً على معرفة الظروف الاقتصادية السائدة وطول الدورة الاقتصادية للظاهرة المدروسة ، فنحصل بذلك على سلسلة زمنية خالية من التغيرات العرضية وهي عبارة عن سلسلة بالتغيرات الدورية في صورة نسبة مئوية من الاتجاه العام .

تمارين الفصل التاسع

(١) ـ يعرض الجدول التالي مبيعات إحدى الشركات للملابس الجاهزة بآلاف الجنيهات خلال الفترة من ١٩٧٨ حتى ١٩٨٥ .

السنوات	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥
المبيعات	٧٠	٧٤	٧٢	٧٧	٨٤	٨٢	٨٦	٩٥

والمطـلوب :

أ ـ رسم شكل انتشار البيانات واحسب معادلة الاتجاه العام الخطية بطريقة الرسم وبطريقة شبه المتوسطات .

ب ـ معادلة الاتجاه العام علماً بأن المبيعات تأخذ شكلاً مستقيماً .

جـ ـ أوجد قيمة المبيعات الاتجاهية في عام ١٩٨٧ .

د ـ أوجد معادلة الاتجاه العام الاسية والقيمة الاتجاهية لسنة ١٩٨٧ .

هـ ـ حدد أياً من النماذج السابقة أفضل في تمثيل البيانات (استخدم ر٢) .

(٢) ـ الجدول التالي يبيّن صادرات مصر من القطن بآلاف الجنيهات خلال الفترة من ١٩٧٥ ـ ١٩٨٣ .

السنوات	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣
الصادرات	٤٢٦	٤٦٩	٣٨٣	٤٨٨	٥٤١	٥١٦	٥٢٨	٥٥٢	٤٦٠

والمطلوب :

أ ـ عرض هذه البيانات بيانياً .

ب ـ وفق معادلة خط الاتجاه العام باستخدام طريقة المربعات الصغرى بفرض أن الصادرات تأخذ شكلاً مستقيماً ثم تنبأ بقيمة الصادرات سنة ١٩٨٧ .

جـ ـ وفق البيانات باستخدام معادلة من الدرجة الثانية وتنبأ بقيمة الصادرات في سنة ١٩٨٧ .

د ـ أي النموذجين أفضل في تمثيل البيانات .

(٣) ـ البيانات الآتية تمثل عدد شهادات الطلاق بالألف في مصر خلال الفترة ١٩٥٣ إلى ١٩٦٨ .

السنة	عدد شهادات الطلاق	السنة	عدد شهادات الطلاق
١٩٥٣	٦٢	١٩٦٢	٥٥
١٩٥٤	٦٠	١٩٦٣	٥٩
١٩٥٥	٦٠	١٩٦٤	٦٢
١٩٥٥	٦٠	١٩٦٥	٦٤
١٩٥٦	٥٧	١٩٦٦	٦٣
١٩٥٧	٦٠	١٩٦٧	٥٧
١٩٥٨	٦٠	١٩٦٨	٦٠
١٩٥٩	٦١		
١٩٦٠	٦٥		
١٩٦١	٦٢		

والمطـلوب :

أ - ارسم هذه البيانات وعلّق على الشكل الناتج .

ب - وفق منحنى الاتجاه العام في هذه البيانات بطريقة المتوسطات المتحركة وارسم منحنى هذه المتوسطات على الشكل الناتج في (أ).

جـ - وفق منحنى الاتجاه العام من هذه البيانات بطريقة المربعات الصغرى .

د - استخدم البيانات المخلصة من أثر الموسمية والعرضية والدورية (بيانات ب) في حساب معادلة الاتجاه العام الخطية وقارنها مع المعادلة المحسوبة من البيانات الأصلية ثم حدد أيهما أفضل في تمثيل البيانات .

(٤) ـ يمثل الجدول التالي مبيعات شركة تامر الكبرى بآلاف الجنيهات في المدة من ١٩٨٠ حتى ١٩٨٦ .

السنوات	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
المبيعات	١١٢	١٢٠	١٥٠	١٢٠	١٤٥	١٦٥	١٦٨

والمطلوب باستخدام طريقة المربعات الصغرى :

أ - احسب معادلة الاتجاه العام للمبيعات بحيث تكون سنة الأساس مرة عام ١٩٨٠ ومرة عام ١٩٨٣ م .

ب - احسب القيمة المتوقعة للمبيعات في عام ١٩٩٠م .

(٥) ـ يوضح الجدول الآتي المبيعات الربع سنوية لشركة رحاب للصناعات الغذائية بآلاف الجنيهات في الفترة من ١٩٨٣ إلى ١٩٨٥ .

الربع / السنوات	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥
الأول	٤٢	٤٦	٥٠
الثاني	٣٨	٤٦	٤٤
الثالث	٤٣	٤٧	٣٥
الرابع	٤٠	٤٧	٥٢

والمطـلوب :

أ ـ رسم السلسلة الزمنية .

ب ـ قدر الدليـل الموسمي بـاستخدام طـريقة المتـوسطات البسيـطة ثم فسّر معنى الأرقام التي تحصل عليها .

جـ ـ استخـدم طريقـة نسبة القيمـة الأصلية إلى المتـوسطات المتحـركـة في حسـاب الرقم القيـاسي الموسمي (طـول الـدورة = ٤) . ثم ارسمهـا على نفس الرسم السابق وبيّن ملاحظاتك .

د ـ حساب معادلة الاتجاه العام الخطية من البيانات الأصلية .

هـ ـ احسب القيمة المتوقعـة للربع الثـاني من عام ١٩٨٧ وذلـك باستخـدام القيمة المتوقعة والدليل الموسمي (نموذج الضرب) .

الفصل العاشر

مبادىء نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

Probability and Probability Distributions

تلعب الاحتمالات دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث إنها المقياس للحوادث غير المؤكدة . وتمثل الاحتمالات ركيزة أساسية لدراسة النظرية الاحصائية والتي تهتم أساساً بمحاولة تخصيص توزيع إحصائي معيّن للظاهرة موضع الدراسة مما يسهل من عملية التحليل الاحصائي لمجتمع الظاهرة عن طريق دراسة لعينة مسحوبة منه ومن ثم تعميم نتائج العينة على المجتمع ككل . وسوف نتعرف في هذا الفصل على أساسيات نظرية الاحتمالات ثم نقوم بدراسة المتغير العشوائي سواء كان منفصلاً أو مستمراً مع دراسة لبعض المؤشرات الهامة مثل القيمة المتوقعة والتباين . ويغطي بقيمة هذا الفصل بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي تستخدم كثيراً في مجال التحليل الاحصائي .

وللتعريف على أساسيات نظرية الاحتمالات فإننا سوف نبدأ بتعريف بعض المصطلحات الهامة والمستخدمة فيها .

التجربة العشوائية The Random Experiment

الاحتمالات كمصطلح مرتبط أساساً بنتائج تجارب نطلق عليها اسم التجارب العشوائية . والتجارب العشوائية هي كل العمليات Operations ذات النتائج غير المعروفة لنا سلفاً . ومثال ذلك النتيجة الممكن الحصول

عليها على الوجه العلوي لزهرة نرد سداسية الشكل فمع أننا نعرف جميع الأحداث الممكنة لهذه التجربة إلّا أننا لا نستطيع التكهن بنتيجة التجربة قبل إجرائها .

مجموعة الأحداث الشاملة (عالم العينة) Sample Space :

هي المجموعة التي تشتمل على جميع الحالات الممكنة لتجربة من التجارب العشوائية وتسمى عناصر هذه المجموعة بالأحداث البسيطة Elementary Events . وعادة ما يرمز لهذه المجموعة بالرمز (S) .

مثال (١٠ ـ ١) :

في تجربة رمي زهرة النرد السابقة فإن عالم العينة (S) هي المجموعة التي عناصرها الأرقام الصحيحة من ١ إلى ٦ . بمعنى أن :

S = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

مثال (١٠ ـ ٢) :

في تجربة رمي زهرتي نرد سداسيتين فإن عالم العينة يتكون من ٣٦ حدثاً بسيطاً هي النتائج الناشئة من اقتران كل وجه على الزهرة الأولى بأي من الأوجه الستة على الزهرة الأخرى . حيث :

S = { (١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (١،٥) ، (١،٦)

(٢،١) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٢،٤) ، (٢،٥) ، (٢،٦)

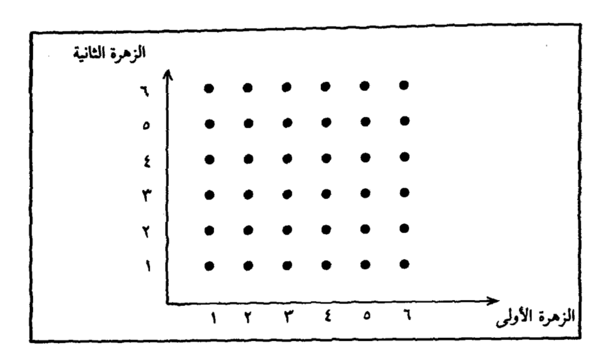
. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

(٦،١) ، (٦،٢) ، (٦،٣) ، (٦،٤) ، (٦،٥) ، (٦،٦) }

والشكـل التالي يـوضـح جميـع الأحـداث التي يمكن الحصـول عليهـا نتيجة لاجراء هذه التجربة



الحـدث The Event :

أي مجموعة جزئية من عـالم العينة (S) تسمى حـدثاً احتمـالياً . بمعنى أن الحـدث هو عبـارة عن تجمع أحـداث بسيـطة ـ تحت صفـة معينـة ـ في مجموعة واحدة وتكون عناصرها منتمية لعالم العينة (S) .

مثال (١٠ ـ ٣) :

في تجـربة رمي زهـرتي النـرد في مثـال (١٠ ـ ٢) فـإن حـدث الحصول على مجمـوعة الـوجهين العلويين يسـاوي ٧ يتحقق إذا ظهرت إحدى النتائج الستة التالية:

{ (١، ٦) ، (٦، ١) ، (٢، ٥) ، (٥، ٢) ، (٣، ٤) ، (٤، ٣) } .

ويـلاحظ أن المجموعـة أعلاه هي عبـارة عن مجموعـة جزئيـة من عـالم العينة (S) تشترك في أن مجموع عناصرها يساوي ٧ .

ويلاحظ كذلك بأن الحدث يتحقق إذا وقعت أي من الحوادث البسيطة التي تحققه .

الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events :

الأحداث المتنافية هي الحوادث التي يستحيل وقوعها معاً في آن واحد ومثال ذلك استحالة الحصول على شعار وكتابة في نفس الوقت عند رمي قطعة نقود واحدة ذات وجهين . وبصورة عامة عند اجراء أي تجربة عشوائية يمكن القول أن أي حدث من الأحداث البسيطة التي يتكون منها عالم العينة متناف مع بقية الأحداث الأخرى .

الأحداث المستقلة Independent Events :

يقال عن حدثين بأنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر . ومثال ذلك عند رمي قطعة نقود مرتين فإن الحصول على شعار من الرمية الأولى كحدث لا يؤثر على نتيجة الرمية الثانية لهذه القطعة كحدث آخر .

التعريف الكلاسيكي للاحتمال :

في عام ١٨٢٠ عرف « لابلاس » احتمال أي حدث عشوائي وليكن (أ) بأنه عدد الأحداث البسيطة من عالم العينة (S) والتي تحقق هذا الحدث منسوبة إلى عدد الأحداث البسيطة الكلية للتجربة العشوائية . وهذا التعريف يشترط أمرين : ــ

١ ــ أن يكون العدد الكلي للأحدث البسيطة للتجربة العشوائية عدداً صحيحاً ومحدداً .

٢ ـ أن تكون لهذه الأحداث البسيطة نفس الفرصة في التحقق . وإذا تحقق هذا فإن :

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد الحالات التي يتحقق فيها الحدث (أ)}}{\text{عدد الحالات الكلية للتجربة العشوائية}}$$

وهذا يعني أن احتمال تحقق (أ) [والذي رمزنا له بالرمز ح (أ)] هو النسبة بين عدد الحالات المواتية والعدد الكلي لجميع الحالات الممكنة .

مثال (١٠ ـ ٤) :

في تجربة رمي زهرتي النرد في مثال (١٠ ـ ٣) أوجد احتمال الحصول على مجموع يساوي ٧ .

الحـل :

نفترض أن (أ) تشير إلى حدث الحصول على مجموع يساوي ٧ . وباستخدام التعريف الكلاسيكي للاحتمال فإن :

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد الحالات التي تحقق أن يكون المجموع ٧}}{\text{عدد الحالات الكلية للتجربة العشوائية}}$$

$$= \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

التكرار النسبي والاحتمال :

احتمال أي حدث (أ) يعرف بأنه عبارة عن التكرار النسبي عندما تعاد التجربة الاحتمالية عدداً كبيراً من المرات . وبذلك فإن التكرار النسبي لحدث ما يمكن أن يستخدم في إيجاد قيمة احتمال وقوع هذا الحدث إن

لم نتمكن من حساب هذه القيمة قبل إجراء التجربة الاحتمالية . وبذلك يعرف احتمال الحدث (أ) بأنه :

$$ح (أ) = \frac{\text{عدد مرات تحقق الحدث (أ)}}{\text{عدد مرات إجراء التجربة الاحتمالية}}$$

بفرض أن عدد مرات إجراء التجربة الاحتمالية كان كبيراً وإلاّ اعتبرت النسبة السابقة تقريباً لقيمة هذا الاحتمال . أي أن الاحتمال هو الرقم الثابت الذي يؤول إليه التكرار النسبي عندما يزداد عدد مرات إجراء التجربة .

خصائص الاحتمال

مما سبق يمكن تلخيص مقياس الاحتمال فيما يلي : ـ

١ ـ احتمال وقوع الحدث (أ) هو عبارة عن مقياس رقمي غير سالب ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح أي أن :

$$\text{صفر} \leq ح (أ) \leq ١$$

ويعكس هذا الرقم فرص هذا الحدث في الوقوع بالنسبة للفرص الكلية لجميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية .

٢ ـ احتمال وقوع حدث مؤكد عدم وقوعه (حدث مستحيل) = صفراً . مثال ذلك إذا كان المطلوب الحصول على احتمال سحب كرة حمراء من كيس يحتوي على كرات بيضاء فقط.

٣ ـ احتمال وقوع حدث مؤكد وقوعه = ١

مثال ذلك إذا كان المطلوب الحصول على شعار أو كتابة عند رمي قطعة نقود متوازنة وكذلك عند إجراء تجربة معينة فإن :

احتمال النجاح + احتمال الفشل = ١

وبصورة عامة فإن :

احتمال وقوع الحدث (أ) + احتمال عدم وقوع الحدث (أ) = ١

$$ح(أ) + ح(\bar{أ}) = ١$$

وتسمى $\bar{أ}$ بالحدث المكمل للحدث أ

٤ ـ إذا كان عالم العينة يشمل مجموعة الأحداث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، $أ_ن$ فإن :

$$ح(أ_١) + ح(أ_٢) + ... + ح(أ_ن) = ١$$

مثال (١٠ ـ ٥) :

في تجربة رمي زهرتي النرد في مثال (١٠ ـ ٢) أوجد :

١ ـ احتمال أن يكون مجموع الوجهين العلويين أقل من أو يساوي ٤ .

٢ ــ احتمـال أن يكون مجمـوع الوجهين العلويين أكبـر من أو يسـاوي ٥ .

الحــل :

١ ــ حـدث الحصــول على مجمـوع الــوجهين العلويين أقـل من أو يساوي ٤ وليكن ح (أ) يتحقق بظهور إحدى النتائج التالية :

(١، ١) ، (١، ٢) ، (٢، ١) ، (١، ٣) ، (٣، ١) ، (٢، ٢)

$$\therefore ح (أ) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

٢ ــ ولإيجـاد احتمال الحصـول على مجموع الـوجهين العلويين أكبـر من أو يسـاوي ٥ وليكن ح (ب) نلاحظ أن حـدثي الحصول على مجمـوع أقل من أو يسـاوي ٤ والحصـول على مجمـوع أكبـر من أو يساوي ٥ هو أمر مؤكد الوقوع أي أن :

$$ح (أ) + ح (ب) = ١$$

$$\therefore ح (ب) = ١ - ح (أ)$$

$$= ١ - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

مثال (١٠ ـ ٦) :

كيس به ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء ، ٤ كرات سوداء وسحبت كرة واحدة منه أوجد :

١ ـ احتمال أن تكون الكرة حمراء .
٢ ـ احتمال أن تكون الكرة سوداء .
٣ ـ احتمال أن تكون الكرة خضراء .

الحـل :

١ ـ احتمال أن تكون الكرة حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلية}} = \frac{٥}{١٢}$

٢ ـ احتمال أن تكون الكرة سوداء = $\frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلية}} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

٣ ـ احتمال أن تكون الكرة خضراء = صفر لأنه حدث مستحيل وقوعه .

مثال (١٠ ـ ٧) :

في تجربة رمي قطعتي عمله متوازنتين . أوجد احتمال الحصول على شعارين .

الحـل :

إذا رمزنا للشعار بالرمز (ش) والكتابة بالرمز (ك) فإننا نحصل على إحدى النتائج التالية :

(ك ، ك) ، (ك ، ش) ، (ش ، ك) ، (ش ، ش) .

∴ احتمال الحصول على شعارين = $\frac{١}{٤}$.

مثال (١٠ ــ ٨) :

من مجموعة كاملة من أوراق اللعب (عددها ٥٢ ورقة) سحبت ورقة واحدة أوجد :

١ ــ احتمال أن تكون ٥ .

٢ ــ احتمال أن تكون أقل من ٣ .

٣ ــ احتمال أن تكون صورة (بنت أو ولد أو شايب) .

الحــل :

١ ــ احتمال أن تكون الورقة المسحوبة ٥ = $\frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$

٢ ــ احتمال أن تكون الورقة المسحوبة أقل من ٣ (١ أو ٢) .

= احتمال أن تكون الورقة ١ + احتمال أن تكون الورقة ٢

$= \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} = \frac{٢}{١٣}$

٣ ــ احتمال الحصول على صورة = $\frac{\text{عدد الصور}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$

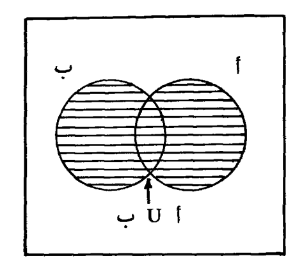
ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام فكرة الأحداث المتنافية حيث :

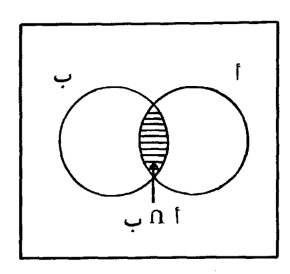
احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على ولد + احتمال الحصول على بنت + احتمال الحصول على شايب .

$= \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$

اتحاد مجموعة من الأحداث Union :

إذا كان لدينا حدث يتحقق بتحقق أي من الحدثين (أ) أو (ب) مثلاً فإننا نعبر عن ذلك الحدث بالرمز (أ U ب) أو اتحاد الحدثين (أ) مع (ب) . ويمكن التعبير عن ذلك هندسياً بالجزء المظلل من الشكل الأيمن التالي :





حيث يمثل الرمز (أ Uب) المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر البسيطة التي تحقق الحدث (أ) مضافاً إليها جميع العناصر التي تحقق الحدث (ب) وبدون تكرار . وعليه فإن ظهور أي من الأحداث البسيطة للمجموعة (أ U ب) معناه أن هذا الحدث إما أن يكون عنصراً من (أ) فقط أو عنصراً من (ب) فقط أو منهما معاً . ويمكن تعميم ذلك لأكثر من مجموعتين .

تقاطع مجموعة من الأحداث Intersection :

إذا كان لدينا حدث ما يتحقق بتحقق حدثين (أ) و (ب) معاً فإننا نعبّر عن هذا الحدث بالرمز (أ ∩ ب) أو الحدث الناشيء من العناصر

المشتركة أو الأحداث البسيطة المشتركة بين كل من الحدث (أ) والحدث (ب) . ويمكن التعبير عنها هندسياً بالجزء المظل كما في الشكل الأيسر السابق .

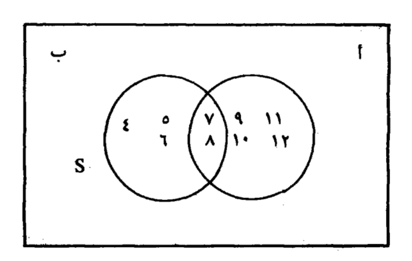
مثال (١٠ ـ ٩) :

في تجربة رمي زهرتي نرد في مثال (١٠ ـ ٢) إذا كان الحدث (أ) يرمز للحصول على مجموع أكبر من أو يساوي ٧ والحدث (ب) يرمز لحدث الحصول على مجموع من ٤ إلى ٨ .

١ ـ أوجد (أ ∩ ب)   ٢ ـ أوجد (أ U ب)

الحـل :

يمكن التعبير عن الأحداث (أ ، ب) هندسياً في الشكل التالي :



من الرسم يتضح أن :

١ ـ أ ∩ ب = المجموعة التي تتكون من المجاميع ٧ أو ٨ .

٢ ـ أ U ب = المجموعة التي تتكون من المجاميع ٤ إلى ١٢ .

قانون جمع الاحتمالات The Addition Law of Probability :

نفترض أننا أجرينا تجربة (ن) من المرات لمشاهدة وقوع كل من الحدثين (أ ، ب) وأن :

ل$_{١}$ = عدد مرات وقوع الحدث أ

ل$_{٢}$ = عدد مرات وقوع الحدث ب

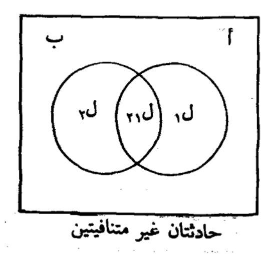
ل$_{٢١}$ = عدد مرات وقوع الحدثين أ ، ب معاً.

ن = عدد الاحداث الشاملة .

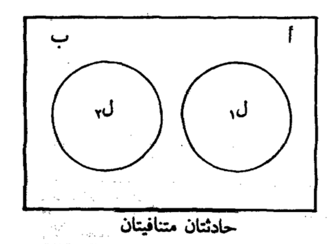
ويتضح من الشكل التالي أن :

ل$_{١}$ + ل$_{٢١}$ هي عدد مرات وقوع الحدث أ

ل$_{٢}$ + ل$_{٢١}$ هي عدد مرات وقوع الحدث ب



حادثتان غير متنافيتين



حادثتان متنافيتان

وباستخدام التعريف السابق للاحتمال نجد أن :

$$ح(أ \cup ب) = \frac{ل_١ + ل_{١٢} + ل_٢}{ن}$$

$$= \frac{ل_١ + ل_{١٢} + ل_٢ + ل_{١٢} - ل_{١٢}}{ن}$$

$$= \frac{ل_١ + ل_{١٢}}{ن} + \frac{ل_٢ + ل_{١٢}}{ن} - \frac{ل_{١٢}}{ن}$$

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب) \qquad (١٠ - ١)$$

ويمكن تعميم قانون جمع الاحتمالات في (١٠ ـ ١) لأكثر من حادثتين غير متنافيتين .

ملاحظة : إذا كان الحدثان (أ ، ب) متنافيين فإن :

$$ح(أ \cap ب) = صفر$$

ومن ثم يؤول قانون جمع الاحتمالات في (١٠ ـ ١) إلى :

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) \qquad (١٠ - ٢)$$

وبصورة عامة يمكن القول أن احتمال وقوع حدث مركب من الأحداث المتنافية يساوي مجموع احتمالات الأحداث المتنافية التي تكونه .

مثال (١٠ ـ ١٠) :

إذا كان عدد الزبائن الداخلين على حلاق للشعر خلال النصف ساعة الأولى من افتتاح محله قيمة بين الصفر والخمسة بالاحتمالات الآتية :

عدد الأشخاص	٠	١	٢	٣	٤	٥
الاحتمال	١ر	١ر	٢ر	٣ر	٢ر	١ر

أوجد احتمال أن يكون عدد الزبائن الداخلين خلال النصف ساعة الأولى من افتتاح المحل ٣ على الأقل .

الحـــل :

حيث إن عدد الزبائن الداخلين هو أحد القيم السابقة فإننا نستطيع أن نطبق قانون الجمع هنا للأحداث المركبة المكونة من اتحاد مجموعتين أو أكثر من عدد الزبائن (حيث إنها أحداث متنافية) . ومن ثم فإن احتمال أن يكون عدد الزبائن ٣ على الأقل يمكن التعبير عنه كما يلي :

ح (٣ على الأقل) = ح (٣ أو ٤ أو ٥)

= ح (٣ U ٤ U ٥)

= ح (٣) + ح (٤) + ح (٥)

= ٣, + ٢, + ١, = ٦,

مثال (١٠ ــ ١١) :

ألقيت زهرة نرد . أوجد احتمال الحصول على رقم ٤ فأكثر .

الحـــل :

نفترض أن :

أ   ترمز لحدث الحصول على رقم ٤

ب   ترمز لحدث الحصول على رقم ٥

جـ   ترمز لحدث الحصول على رقم ٦

وحيث إنها أحداث متنافية

ح (٤ فأكثر) = ح (٤ أو ٥ أو ٦)

= ح (أ) + ح (ب) + ح (جـ)

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٢}$

قانون ضرب الاحتمالات The Multiplication Law of Probability

إذا كان الحدثان (أ ، ب) مستقلين فإن :

ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب) (١٠ — ٣)

وبصورة عامة إذا كان الحدث المركب يتكون من مجموعة من الأحداث المستقلة فإن احتمال وقوع هذا الحدث المركب يساوي حاصل ضرب احتمالات هذه الأحداث المستقلة .

أما إذا كان الحدثان (أ ، ب) غير مستقلين فإن :

ح (أ ∩ ب) = ح (ب) × ح (أ | ب) (١٠ — ٤)

حيث ح (أ | ب) هو الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (أ) علماً بأن الحدث (ب) قد وقع . وبصورة بديلة فإن :

ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب | أ) (١٠ — ٥)

حيث ح (ب | أ) هو الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (ب) علماً بأن الحدث (أ) قد وقع فعلاً .

ملاحظـة :

يتضح من العلاقات (١٠ — ٣) ، (١٠ — ٤) ، (١٠ — ٥) أنه يمكن وضع تعريف بديل للأحداث المستقلة على النحو التالي : —

الحدثان (أ ، ب) مستقلان إذا كان :

ح (أ) = ح (أ | ب)

أو ح (ب) = ح (ب | أ) .

بمعنى أن الاحتمال الشرطي لوقوع أي من الحدثين تحت شرط وقوع الحدث الآخر يساوي احتمال وقوع الحدث غير الشرطي ، وهو ما يتفق مع تعريف الأحداث المستقلة .

الاحتمال الشرطي Conditional Probability :

باستخدام العلاقة (١٠ ــ ٤) يمكن حساب قيمة احتمال وقوع الحدث (أ) بشرط أن الحدث (ب) قد وقع فعلاً كما يلي : ــ

$$ح\,(أ \mid ب) = \frac{ح\,(أ \cap ب)}{ح\,(ب)} \qquad \text{بشرط أن ح (ب)} > \text{صفر}$$

وكذلك من العلاقة (١٠ ــ ٥) يمكن حساب قيمة الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث (ب) علماً بأن الحدث (أ) قد وقع فعلاً بالعلاقة .

$$ح\,(ب \mid أ) = \frac{ح\,(أ \cap ب)}{ح\,(أ)} \qquad \text{بشرط أن ح (أ)} > \text{صفر}$$

مثال (١٠ ــ ١٢) :

إذا كان احتمال الحصول على طالب متزوج من جامعة الكويت هو ٢٥ر واحتمال الحصول على طالب من كلية التجارة هو ١٥ر . أوجد احتمال الحصول على طالب من كلية التجارة ومتزوج من بين جميع طلاب الجامعة .

الحــل :

نفرض أن (أ) ترمز لحدث الحصول على طالب متزوج من الجامعة وأن (ب) ترمز لحدث الحصول على طالب من كلية التجارة .

∴ ح (أ) = ٢٥ر ، ح (ب) = ١٥ر

ح (متزوج ومن كلية التجارة) = ح (أ ∩ ب) .

وحيث ان الحدثين مستقلان فإن :

$$ح(أ \cap ب) = ح(أ) \times ح(ب)$$

$$= ٢٥ر \times ١٥ر = ٠٣٧٥ر$$

مثال (١٠ ــ ١٣) :

في تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين في مثال (١٠ ــ ٧) أوجد احتمال الحصول على شعارين بشرط أن يكون احداهما من قطعة النقود الثانية .

الحــل :

بافتراض أن (أ) ترمز لحدث الحصول على شعارين ≡ (ش ، ش)
وبافتراض أن (ب) ترمز لحدث الحصول على شعار من إلقاء القطعة الثانية ≡ (ك ، ش) ، (ش ، ش)

$$\therefore ح(ب) = \frac{٢}{٤}$$

وباستخدام تعريف الاحتمال الشرطي :

$$ح(أ \mid ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} = \frac{١}{٤} \div \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال (١٠ ــ ١٤) :

كيس به ١٢ كرة منها ٥ حمراء ، ٣ بيضاء ، ٤ سوداء كما في مثال (١٠ ــ ٦) سحبت كرتان على التوالي أوجد احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى سوداء إذا كان :

١ ــ السحب يتم بإرجاع الكرة الأولى المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية .

٢ ــ السحب يتم بدون إرجاع .

الحــل :

للحصـول على كرتين إحـداهما حمـراء والأخرى سـوداء يلزم أن تكون الكرة الأولى حمراء والأخرى سوداء أو العكس الأولى سوداء والثانية حمراء .

وبفرض أن : أ ترمز لحدث الحصول على كرة حمراء وأن

ب ترمز لحدث الحصول على كرة سوداء

وحيث ان الأحداث متنافية فإن :

الاحتمال المطلوب = ح (أ) × ح (ب) + ح (ب) × ح (أ)

أولاً : إذا كان السحب بالارجاع :

الاحتمال المطلوب = $\frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١٢} + \frac{٤}{١٢} \times \frac{٥}{١٢} = \frac{٤٠}{١٤٤} = \frac{٥}{١٨}$

ثانياً : إذا كان السحب بدون إرجاع :

الاحتمال المطلوب = $\frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} + \frac{٤}{١٢} \times \frac{٥}{١١} = \frac{٤٠}{١٣٢} = \frac{١}{٣٣}$

المتغير العشوائي Random Variable :

يصـاحب كل تجـربة من التجـارب العشوائيـة مجموعـة أحداث شـاملة « عالم العينة » . وكذلك فإن ناتج التجربة العشوائيـة سوف نـرمز لـه بالمتغيـر (س) حيث تختلف قيمتها من محاولة لأخرى ويسمى بالمتغير العشـوائي حيث لا يمكن معرفة قيمته إلاَّ بعد إجراء التجربة .

ووصف المتغيـر العشوائي بـأنه متصـل Continuous أو منفصل Discrete يتـوقف على عالم العينـة . فإذا كـان عالم العينـة لا نهـائي ولا يمكن حصـره فالمتغير العشوائي المناظر له يسمى بالمتغير المتصل ، أما إذا كان عالم العينة محـدوداً ويمكن حصره فـإن المتغيـر العشـوائي المنـاظـر لـه يسمى بـالمتغيـر المنفصل .

مثال (١٠ ــ ١٥) :

أوجد المتغير العشوائي الذي يناظر تجربة رمي زهرة النرد في مثال (١٠ ــ ١) .

الحــل :

نعلم مما سبق أن التجربة العشوائية الدالة على رمي زهرة نرد هي عدد صحيح يقع بين ١ ، ٦ .

∴ المتغير العشوائي (س) يأخذ أحد القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .
وواضح أنه متغير عشوائي منفصل .

مثال (١٠ ــ ١٦) :

بافتراض أن الباص يصل إلى محطة معيّنة دائماً بين الساعة ٨ ، ٨,١٠ صباحاً . وإذا كان هناك شخص يركب هذا الباص يومياً ويذهب للمحطة دائماً الساعة ٨ صباحاً . أوجد المتغير العشوائي الذي يناظر الوقت الذي يجب أن ينتظره الشخص يومياً لكي يلحق بالباص .

الحــل :

نفترض أن (س) ترمز للمتغير العشوائي الذي يناظر مقدار الوقت الذي يجب أن ينتظره الشخص يومياً من لحظة وصوله للمحطة في الساعة الثامنة إلى لحظة وصول الباص للمحطة .

يتضح أن (س) هي متغير عشوائي تنحصر قيمته بين الصفر، ١٠ دقائق أي أن :

صفر ≤ س ≤ ١٠

وهي قيم غير محدودة وتأخذ قيمة صحيحة أو كسرية .

وواضح أنه متغير عشوائي متصل يمكن توصيله بخط مستقيم ابتداءاً من القيمة صفر وحتى القيمة ١٠ .

التوزيعات الاحتمالية

تركزت دراستنا في الفصول السابقة لمراحل الاحصاء الوصفي على جمع البيانات عن الظاهرة (المتغير) موضع الدراسة ثم إعداد التوزيعات التكرارية وحساب مقاييس الموضع ومقاييس التشتت منها لوصف المتغيرات موضع الدراسة . وفي هذه المرحلة سوف نحاول الحصول على مثل هذه المقاييس بصورة أدق بعد تحديد شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير موضع الدراسة وذلك بحساب احتمالات القيم التي يأخذها المتغير العشوائي باستخدام قواعد الاحتمالات .

وفي المثال التالي سوف نوضح بإسهاب كيفية الحصول على التوزيع الاحتمالي ثم ننتقل إلى استخدام التوزيعات الاحتمالية في حساب الوسط الحسابي والتباين كمقياسين للنزعة المركزية والتشتت على التوالي . وسوف نستعرض بعد ذلك بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي سوف نتعرض إليها في دراستنا لاختبار الفروض الاحصائية في الفصل التالي .

مثال (١٠ ـ ١٧) :

في تجربة رمي ثلاث قطع من النقود المتوازنة . أوجد التوزيع الاحتمالي الذي يمثل عدد مرات ظهور الشعار .

الحـل :

عند رمي ثلاث قطع نقود فإننا نحصل على أحد الحالات التالية والتي يلخصها الجدول التالي بافتراض أن (س) تمثل المتغير العشوائي لعدد الشعارات في التجربة، (ش) تمثل الشعار وأن (ك) تمثل الكتابة.

رقم القطعة	س = صفر	س = ١			س = ٢			س = ٣
١	ك	ش	ك	ك	ش	ك	ش	ش
٢	ك	ك	ش	ك	ش	ش	ك	ش
٣	ك	ك	ك	ش	ك	ش	ش	ش

يلاحظ من الجدول أن (س) هي متغير عشوائي منفصل تأخذ القيم صفر، ١، ٢، ٣ حيث :

س = صفر يمثل عدم ظهور الشعار مطلقاً وهي حالة واحدة .
س = ١ يمثل ظهور الشعار على قطعة واحدة وهي ٣ حالات .
س = ٢ يمثل ظهور الشعار على قطعتين وهي ٣ حالات .
س = ٣ يمثل ظهور الشعار على ثلاث قطع وهي حالة واحدة .

ومن ثم فإن : ح (س = صفر) = ف (صفر) = $\frac{١}{٨}$

ح (س = ١) = ف (١) = $\frac{٣}{٨}$

ح (س = ٢) = ف (٢) = $\frac{٣}{٨}$

ح (س = ٣) = ف (٣) = $\frac{١}{٨}$

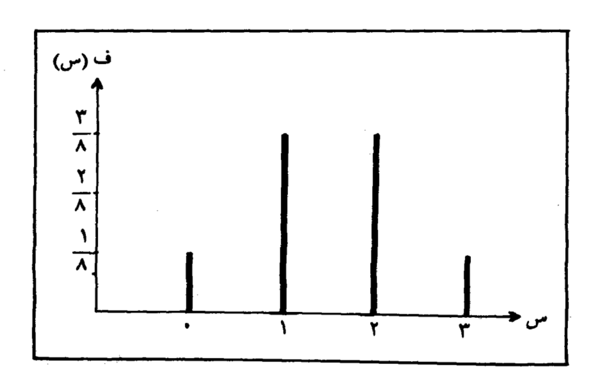
حيث ف (س) هي قيمة الاحتمال عند النقطة (س) أو دالة التوزيع الاحتمالي . ويمكن تلخيص النتائج السابقة في جدول التوزيع الاحتمالي التالي :

س	صفر	١	٢	٣
ف (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

وكذلك يمكن وضع دالة التوزيع الاحتمالي في الصورة التالية :

$$ف(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} & \text{عندما س = صفر} \\ \frac{٣}{٨} & \text{عندما س = ١} \\ \frac{٣}{٨} & \text{عندما س = ٢} \\ \frac{١}{٨} & \text{عندما س = ٣} \\ \text{صفر} & \text{عند أي قيمة أخرى للمتغير (س)} \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الاحتمال والخاصة بعدد الشعارات عند إلقاء ثلاث قطع عملة متوازنة في الشكل التالي .



ويتضح مما سبق أنه في حالة التوزيعات الاحتمالية المنفصلة تكون :

١ ـ الاحتمالات المتاحة معرفة على مجموعة من النقاط (القيم التي يأخذها المتغير العشوائي) والاحتمال عند نقطة معيّنة يساوي الارتفاع لهذه النقطة .

٢ ـ دالة الاحتمال معرفة على مجموعة من النقاط التي يأخذها المتغير العشوائي وخلاف ذلك تكون الاحتمالات = صفر .

وهذا على عكس التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث الاحتمال عند نقطة معيّنة يساوي صفراً حيث الاحتمال في هذه الحالة لا يعني مساحة بل يمثل تكثفاً للاحتمال ومن ثم تسمى دوال الاحتمال للمتغيرات المتصلة بدوال كثافة الاحتمال .

خصائص دالة الاحتمال :

١ ـ دالة غير سالبة دائماً أي أن :

ف (س) ≤ صفر .

٢ ـ مجموع الاحتمالات (أو المساحة تحت المنحنى) تساوي الواحد الصحيح أي أن :

مجـ ف (س) = ١ في حالة التوزيعات المنفصلة

∫ ف (س) ء س = ١ في حالة التوزيعات المتصلة

حيث ∫ ترمز إلى تكامل الدالة.

مثال (١٠ ـ ١٨) :

أثبت أن التوزيع الاحتمالي في مثال (١٠ ـ ١٧) هو دالة احتمال .

الحـل :

١ ـ يتضح أن ف (س) موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي (س)

٢ ـ مجـ ف (س) = $\frac{١}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٨} = ١$

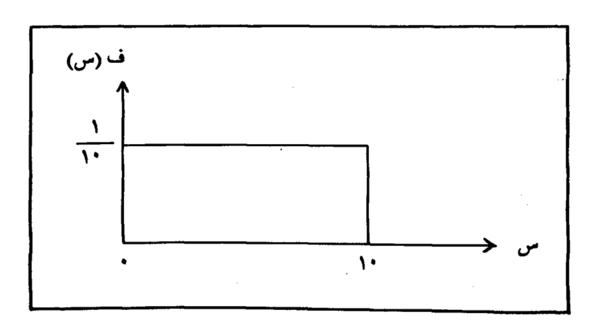
∴ ف (س) هي دالة احتمال .

مثال (١٠ ـ ١٩) :

أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل في مثال (١٠ ـ ١٦) ثم برهن أنه دالة كثافة احتمال .

الحـل :

يتضح أن الاحتمال يأخذ قيمة ثابتة على جميع مدى المتغير العشوائي (س) من صفر إلى ١٠ وهذه القيمة تساوي $\frac{١}{١٠}$. ويسمى مثل ذلك التوزيع بالتوزيع المنتظم Uniform Distribution . والشكل التالي يوضح دالة كثافة الاحتمال في هذه الحالة .



وتكتب دالة كثافة الاحتمال رياضياً في الصورة التالية :

$$ف(س) = \frac{١}{١٠} \quad \text{حيث صفر} \leq س \leq ١٠$$

$$= \text{صفر} \quad \text{خلاف ذلك}$$

ونلاحظ أيضاً أنها تحقق الشروط كدالة للاحتمال حيث :

١ ـ ف (س) $\geq$ صفر لجميع قيم (س)

٢ ـ $\int_{صفر}^{١٠}$ ف (س) ء س = ١

ومن الرسم أيضاً يتضح أن المساحة = مساحة المستطيل

= القاعدة × الارتفاع

$$= ١٠ \times \frac{١}{١٠} = ١$$

دالة الاحتمال التجميعية Cumulative Probability Function :

يمكن بمعلومية دالة كثافة الاحتمال تقدير دالة الاحتمال التجميعية والتي تسمى أحياناً بدالة التوزيع Distribution Function والتي سوف نرمز لها بالرمز د (س~) باستخدام العلاقة

د (س~) = ح (س $\leq$ س~)

$$= \sum_{ر = -\infty}^{ر = س~} ف(س_ر) \quad \text{في حالة التوزيعات المنفصلة}$$

$$= \int_{-\infty}^{س~} ف(س) \, ءس \quad \text{في حالة التوزيعات المتصلة}$$

مثال (١٠ ــ ٢٠) :

أوجد دالة الاحتمال التجميعية لعدد مرات ظهور الشعار عند رمي ثلاث قطع نقود متوازنة في مثال (١٠ ــ ١٧) .

الحــل :

الجدول التالي يلخص قيم المتغير العشوائي (س) الذي يمثل عدد الشعارات التي تظهر على القطع وكذلك دالة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعية لجميع قيم (س).

س	ف (س)	د (س)
صفر	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٨}$
١	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٤}{٨}$
٢	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٧}{٨}$
٣	$\frac{١}{٨}$	١

حيث :

$$د\,(صفر) = ح\,(س \leq صفر) = ف\,(صفر) = \frac{١}{٨}$$

$$د\,(١) = ح\,(س \leq ١) = ف\,(صفر) + ف\,(١)$$

$$= \frac{١}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٤}{٨}$$

وهي تعطي احتمال الحصول على شعار واحد على الأكثر

د (٢) = ح (س ≥ ٢) = ف (صفر) + ف (١) + ف (٢)

$$= \frac{٤}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٧}{٨}$$

وهي تعطي احتمال الحصول على شعارين على الأكثر

وبالمثل :

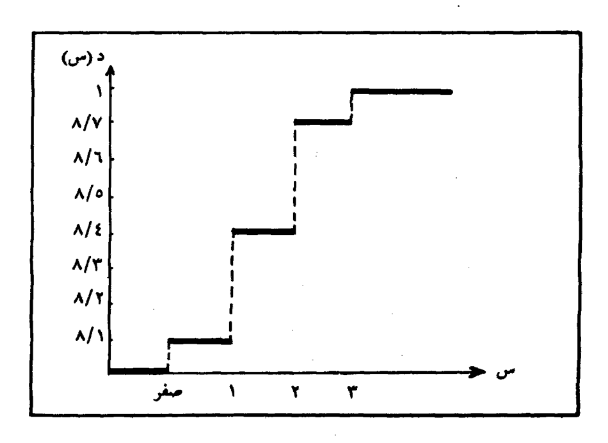
د (٣) = ح (س ≥ ٣) = ف (صفر) + ف (١) + ف (٢) + ف (٣)

$$= \frac{٧}{٨} + \frac{١}{٨} = ١$$

وهي تعطي احتمال الحصول على ثلاثة شعارات على الأكثر

ويلاحظ أن هذا أمر مؤكد الحدوث.

والشكل التالي يمثل دالة الاحتمال التجميعية في هذه الحالة :



ويلاحظ من الرسم أن دالة التوزيع في حالة التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لها الخصائص التالية :

١ ــ دالة غير متصلة تنحصر قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح .

٢ ــ دالة قفزات Step Function أي يوجد بها قفزات وكل قفزة تساوي قيمة الاحتمال عند النقطة .

٣ ــ د (∞) = ح (س $\leq \infty$) = ١

د ($-\infty$) = ح (س $\leq -\infty$) = صفر .

حيث ∞ هي الحد الأعلى في عالم العينة .

٤ ــ إذا كانت $س_١ < س_٢$ فإن :

د ($س_١$) $\leq$ د ($س_٢$) .

مثال (١٠ ــ ٢١) :

أوجد دالة الاحتمال التجميعية بمعلومية دالة كثافة الاحتمال التي حصلنا عليها في مثل (١٠ ــ ١٩) .

الحــل :

حيث أن ف (س) = $\frac{١}{١٠}$ صفر $\leq$ س $\leq$ ١٠

$$\therefore د(\text{س}) = \int_{\text{صفر}}^{\text{س}} \frac{١}{١٠} \, ٤ \text{ س}$$

$$= \frac{\text{س}}{١٠} \qquad \text{صفر} \leq \text{س} < ١٠$$

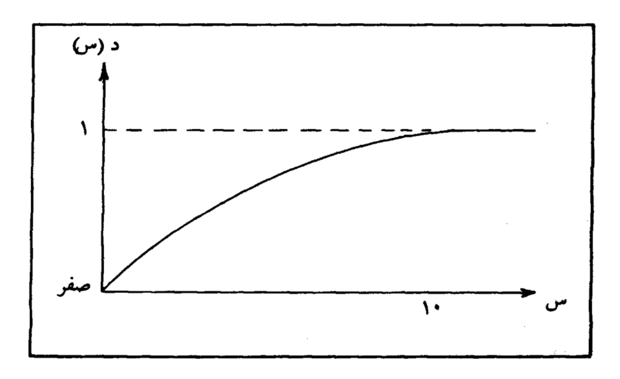
كما نلاحظ أن د (سـ) = ١ لجميع قيم سـ ≥ ١٠ .

ويمكن تلخيص دالة التوزيع في الصورة التالية :

د (سـ) = $\frac{\text{سـ}}{١٠}$ صفر ≤ سـ < ١٠

= ١   سـ ≥ ١٠

والشكل التالي يمثل هذه الدالة بيانياً .



ويتضح من الرسم انها دالة متصلة لها نفس خصائص دالة التوزيع التي سبق ذكرها، هذا بالاضافة الى انه اذا كان أ < ب فإن

ح (أ ≤ س ≤ ب) = د (ب) - د (أ) .

التوقـــع The Expectation

التوقع هو متوسط التوزيع الاحتمالي وإذا فرضنـا أن ت (س) ترمـز إلى توقع المتغير (س) والذي له دالة الاحتمـال ف (س) ، يمـكن حساب التـوقع باستخدام التعريف التالي :

ت (س) = مجـــــ س ف (س) في حالة التوزيعات المنفصلة

= ∫ س ف (س) ء س في حالة التوزيعات المتصـلة

وبصورة عامة يمكن ايجاد توقع أي دالـة في (س) ولتكن هـ (س) على النحو التالي :

ت [هـ (س)] = مجـــــ هـ (س) ف (س) للتوزيعات المنفصلة

= ∫ هـ (س) ف (س) ء س للتوزيعات المتصـلة

وســـوف نهتم فقط بحســاب تــوقـــع الـدالـــة هـ (س) = س^{٢} وذلـــك لاستخدامها في حساب التباين حيث :

ت (س^{٢}) = مجـــــ س^{٢} ف (س) للتوزيعات المنفصلة

= ∫ س^{٢} ف (س) ء س للتوزيعات المتصـلة

وبعد حساب توقع (س) وتوقع (س^{٢}) يمكن تقدير قيمـة التباين والـذي سوف نرمز له بالرمز (σ^2) باستخدام العلاقة .

التباين = σ^2 = ت (س^{٢}) ـ [ت (س)]^{٢}

وكـذلـك نعلم من دراستنـا لمقـاييس التشتت في الفصـل الخـامس أنـه يمكن حســاب الانحراف المعيـاري للمتغير (س) . بـايجـاد الجـذر التـربيعي للتباين .

خصائص التوقع :

١ ــ توقع (مقدار الثابت) = المقدار الثابت أي أن :

ت (أ) = أ   حيث أ مقدار ثابت

٢ ــ توقع (مقدار ثابت × متغير) = المقدار الثابت × توقع (المتغير) أي أن :

ت (أ س) = أ × ت (س)

٣ ــ توقع (مقدار ثابت + متغير) = المقدار الثابت + توقع (المتغير) أي أن :

ت (أ + س) = أ + ت (س) .

مثال (١٠ ــ ٢٢) :

أوجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير المنفصل (س) في مثال (١٠ ــ ١٧) .

الحـل : يمكن الوصول إلى الحل بسهولة بتكوين الجدول التالي :

س	ف (س)	س ف (س)	$س^2$ ف (س)
صفر	٨/١	صفر	صفر
١	٨/٣	٨/٣	٨/٣
٢	٨/٣	٨/٦	٨/١٢
٣	٨/١	٨/٣	٨/٩
	١	١,٥٠	٣

الوسط الحسابي = ت (س) = مجـــــ س ف (س)

= ١,٥٠

ت ($س^2$) = مجـــــ $س^2$ ف (س) = ٣

∴ تباين (س) = ت (س^{٢}) ـ [ت(س)]^{٢}

= ٣ ـ (١,٥)^{٢}

= ٣ ـ ٢,٢٥ = ٧٥,

ملاحظـة :

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{,٧٥}$ = ٨٦٦,

مثال (١٠ ـ ٢٣) :

أوجـد الـوسط الحســابي والتبـاين للمتغيـر المتصـل (س) في مثـال (١٠ ـ ١٩) .

الحـل :

الوسط الحسابي = ت (س) = $\int_{\text{صفر}}^{١٠} \frac{١}{١٠}$ س ءس

= $\frac{١}{١٠} \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} \right]_{\text{صفر}}^{١٠}$ = $\frac{١}{١٠} (\frac{١٠٠}{٢})$ = ٥

وبالمثل :

ت (س^{٢}) = $\int_{\text{صفر}}^{١٠} \frac{١}{١٠}$ س^{٢} ءس

= $\frac{١}{١٠} \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{\text{صفر}}^{١٠}$ = $\frac{١}{١٠} (\frac{١٠٠٠}{٣})$ = ٣٣,٣٣

تباين (س) = ت(س^{٢}) ـ [ت(س)]^{٢}

= ٣٣,٣٣ ـ (٥)^{٢}

= ٣٣,٣٣ ـ ٢٥ = ٨,٣٣

أولاً : التوزيع الطبيعي (المعتاد) Normal Distribution

التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً في التطبيقات الاحصائية المختلفة ، وكثير من الظواهر الاقتصادية والتجارية لها توزيع احتمالي يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعي . فمثلاً نسبة الربح (أو الخسارة) في أسعار السندات يقترب توزيعها من التوزيع الطبيعي والتوزيع الاحتمالي للمبيعات السنوية للمؤسسات التجارية يمكن تقريبه بتوزيع طبيعي . أيضاً مجموع الدرجات في امتحان عام مثل الثانوية العامة يخضع كغيره من الظواهر للتوزيع الطبيعي . ويمكن معرفة دقة تقريب التوزيع الاحتمالي للظاهرة موضع الدراسة بالتوزيع الطبيعي بمقارنة التوزيع التكراري النسبي لعينة كبيرة مع التوزيع الاحتمالي الطبيعي .

وقد وجد قديماً أن توزيعات أخطاء المشاهدة (وهي الفروق بين القيم الفعلية والقيم المتوقعة) يقترب كثيراً من شكل المنحنى الطبيعي كما أن أهمية هذا التوزيع تظهر في نظرية النهاية المركزية والتي تنص على أن مجموع ومتوسط عينات من بيانات عشوائية (أيا كان توزيعها الاحتمالي) مأخوذة من مجتمع من البيانات يقترب توزيعها من التوزيع الطبيعي وتعتمد اختبارات الفروض الاحصائية وفترات الثقة التي يحتمل أن تتضمن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي أو الظاهرة محل الدراسة في تحديدها على التوزيع الطبيعي أو افتراض أن المتغير العشوائي الذي يصف الظاهرة التي يراد قياسها تتبع التوزيع الطبيعي .

وبصورة عامة أثبت جاوس Gauss أنه لو تأثر أحد المقاييس لإحدى الظواهر المختلفة بعدد كبير من العوامل العشوائية التي تحدث آثاراً ضئيلة في الحجم غير متوقعة في الاتجاه بالزيادة أو بالنقص فإن مقياس هذه الظاهرة يخضع في نهاية الأمر للتوزيع الطبيعي ، ويمثل التوزيع الطبيعي أهم التوزيعات الاحصائية على الاطلاق حيث إنه اعتبر أساساً لكثير من نظريات الاحصاء الرياضي بل إن كثيراً من التوزيعات الاحصائية الأخرى (مثل توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون) تقترب صورتها من التوزيع الطبيعي تحت شروط معيّنة .

دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function :

إذا كان لدينا متغير عشوائي متصل (س) يتبع التوزيع الطبيعي الذي مركزه (μ) وانحرافه المعياري (σ) فإن الصورة الرياضية لدالة كثافة الاحتمال تأخذ الشكل :

$$ف(س) = \frac{1}{\sqrt{2ط}\,\sigma} هـ^{\frac{-(س-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث :

ط = ٣,١٤ ، هـ = ٢,٧١٨ ، $-\infty <$ س $< \infty$

وهذه الدالة تأخذ شكل منحنى متماثل ذي قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية ، ويشبه في شكله العام شكل جرس مقلوب ولهذا يعرف أحياناً بالمنحنى الناقوسي(الجرسي) ، كما يطلق عليه البعض اسم منحنى جاوس نسبة إلى مكتشفه . ويعتمد شكل المنحنى على قيمة المعلمتين

(μ , σ) حيث يؤدي تغير مقياس الموضع μ إلى انتقال المنحنى يميناً أو يساراً بينما يؤدي تغير مقياس التشتت σ إلى اتساع أو ضيق المنحنى .

خواص التوزيع الطبيعي Properties of Normal Distribution :

(١) التوزيع الطبيعي توزيع احتمالي متماثل حول متوسطة (قيمته المتوقعة μ) ، بمعنى أن المتوسط الحسابي يقسم المنحنى الطبيعي إلى جزئين متماثلين تماماً .

(٢) يصل المنحنى إلى قيمته العظمى عند س = μ وعندها يتساوى كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

(٣) المساحة تحت المنحنى تمثل الاحتمال الكلي للمتغير العشوائي (احتمال أن يأخذ (س) قيمة بين − ∞ و ∞) لذلك فإن المساحة تساوي واحداً صحيحاً . كما أن مساحة أي جزء من المنحنى تمثل احتمال وقوع حدث معيّن (أي احتمال أن تأخذ (س) قيمة بين عدة قيم داخل هذا الجزء) وهي قيمة محصورة بين الصفر والواحد .

(٤) من الشكل التالي يتضح الآتي : ـ

أ ـ مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين س = $\mu - \sigma$ ، س = $\mu + \sigma$ تساوي ٦٨,٢٧٪ من المساحة الكلية ، أي أن :

$$ح (\mu - \sigma < س < \mu + \sigma) = ٠,٦٨٢٧$$

ب ـ مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين س = $\mu - ٢\sigma$ ، س = $\mu + ٢\sigma$ تساوي ٩٥,٤٥٪ من المساحة الكلية ، أي أن :

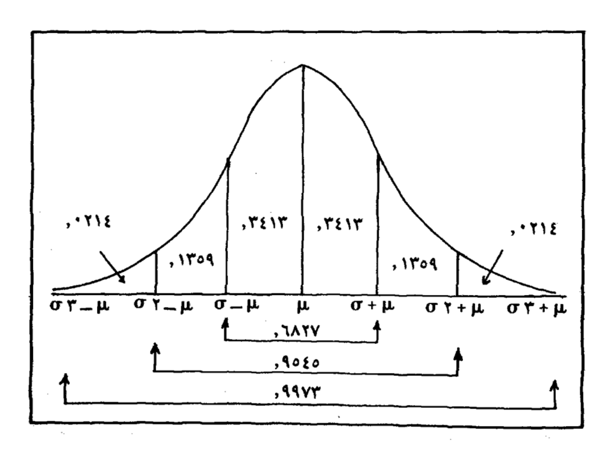
ح (μ ـ ٢ σ < س < μ + ٢ σ) = ٠,٩٥٤٥

جـ ـ مساحة الجزء من المنحنى المحصورة بين س = μ ـ ٣ σ ، س = μ + ٣ σ تساوي ٩٩,٧٣٪ من المساحة الكلية ، أي أن :

ح (μ ـ ٣ σ < س < μ + ٣ σ) = ٠,٩٩٧٣

ويعني هذا أن احتمال أن تأخذ (س) قيمة أكبر من (μ + ٣ σ) أو قيمة أقل من (μ ـ ٣ σ) هو حدث نادر جداً احتماله = ١-٠,٩٩٧٣ = ٠,٠٠٢٧ (أي ٢٧ من كل ١٠٠٠٠).

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي



د - كما أن مساحة الجزء من المنحنى المحصورة س = μ - $1,96\,\sigma$، س = μ + $1,96\,\sigma$ تساوي ٩٥٪ من المساحة الكلية أي أن :

ح ($\mu - 1,96\,\sigma$ > س > $\mu + 1,96\,\sigma$) = ٠,٩٥

هـ - المساحة تحت المنحنى بين س = μ - $2,58\,\sigma$، س = μ + $2,58\,\sigma$ تساوي ٩٩٪ من المساحة الكلية أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة بين ($\mu - 2,58\,\sigma$) والقيمة ($\mu + 2,58\,\sigma$) هو حدث شبه مؤكد احتماله ٩٩ ٪ أي أن :

ح ($\mu + 2,58\,\sigma$ > س > $\mu - 2,58\,\sigma$) = ٠,٩٩

* **ملاحظة** : لتحديد هذه المساحات يلزم معرفة معالم التوزيع (μ ، σ)

التوزيع الطبيعي المعياري (أو القياسي) Standard Normal Distribution

علمنا من معادلة التوزيع الطبيعي وشكل المنحنى سابقاً أنه يعتمد على معلمتين (الوسط الحسابي للتوزيع μ ، والانحراف المعياري σ) لذلك فإن اختلاف هاتين المعلمتين يؤدي إلى اختلاف شكل التوزيع الطبيعي ولإيجاد المساحة تحت كل منحنى طبيعي لحدث معيّن نحتاج إلى جدول بالمساحات لكل منحنى ، وهذا أمر غير ممكن عملياً ، لذلك فإننا نحتاج إلى جدول واحد لمساحة الأجزاء من هذا المنحنى مهما كانت قيمة المعلمتين . ومن هنا نشأت الأهمية إلى إيجاد مثل هذا الجدول بأجزاء من المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري . والتوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع طبيعي متوسطة صفر وانحرافه المعياري واحد صحيح (μ = صفر ،

$\sigma = 1$) . فإذا كان لدينا متغير عشوائي (س) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ ، فيمكن الحصول على متغير آخر (ى) يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وذلك باستخدام التعويض .

$$ى = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

والمتغير العشوائي الجديد (ى) لا يخضع لوحدة القياس الأصلية للبيانات ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$ف(ى) = \frac{1}{\sqrt{2ط}} هـ^{-\frac{ى^2}{2}} \quad -\infty < ى < \infty$$

من خواص التوزيعات الطبيعية أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي لمتغير عشوائي طبيعي (س) متوسطة (μ) وانحرافه المعياري (σ) بين س = أ ، س= ب ، والتي تعكس احتمال أن تأخذ (س) قيمة بين (أ ، ب) تساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين

$$ى = \frac{أ - \mu}{\sigma} \quad ، \quad ى = \frac{ب - \mu}{\sigma}$$

مهما كانت قيمة μ و σ .

وبصورة أخرى فإن :

$$ح(أ \leq س \leq ب) = ح\left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leq ى \leq \frac{ب - \mu}{\sigma}\right)$$

لذى فلإيجاد احتمال أي حدث طبيعي (يتبع التوزيع الطبيعي) فإننا نحوله إلى حدث طبيعي معياري باستخدام العلاقة :

$$ى = \frac{\text{قيمة المتغير الطبيعي - متوسطة الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

ومن ثم نستخدم جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري لإيجاد مساحة ذلك الحدث . وجدول رقم (١) في آخر الكتاب يعطي المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين الحد الأدنى (- ∞) وقيمة معينة ص (حيث ص ≤ صفر) . وهذه المساحات يمكن ايجادها باستخدام العلاقة :

$$م\,(ص) = \int_{-\infty}^{ص} \frac{١}{\sqrt{٢ط}}\, هـ^{-\frac{ى^{٢}}{٢}}\, ءى \quad ، \quad -\infty < ى < \infty$$

حيث م (ص) هي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (ى) قيمة بين (- ∞ ، ص) .

ونظراً لأن التوزيع الطبيعي متماثل فإن المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين (ى) تساوي (صفر ، ص) هي نفس المساحة بين (ى) تساوي (صفر ، - ص) . أي أن :

$$ح\,(صفر \le ى \le ص) = ح\,(-ص \le ى \le صفر)$$

ومن خصائص التوزيع الطبيعي المعياري أن :

أ - $ح\,(\mu - \sigma \le س \le \mu + \sigma) = ح\,(-١ \le ى \le ١)$
$= ٠,٦٨٢٧$

ب ـ $\text{ح}(\mu - ٢\sigma \leq \text{س} \leq \mu + ٢\sigma) = \text{ح}(-٢ \leq \text{ى} \leq ٢)$

$= ٠,٩٥٤٥$

جـ ـ $\text{ح}(\mu - ٣\sigma \leq \text{س} \leq \mu + ٣\sigma) = \text{ح}(-٣ \leq \text{ى} \leq ٣)$

$= ٠,٩٩٧٣$

د ـ $\text{ح}(\mu - ١,٩٦\sigma \leq \text{س} \leq \mu + ١,٩٦\sigma)$

$= \text{ح}(-١,٩٦ \leq \text{ى} \leq ١,٩٦) = ٠,٩٥$

هـ ـ $\text{ح}(\mu - ٢,٥٨\sigma \leq \text{س} \leq \mu + ٢,٥٨\sigma)$

$= \text{ح}(-٢,٥٨ \leq \text{ى} \leq ٢,٥٨) = ٠,٩٩$

وسوف نستعرض فيما يلي بعض الأمثلة والتي توضح كيفية استخدام جدول (١) .

مثال (١٠ ـ ٢٤) :

أوجد القيمة المعيارية المقابلة للقيم التالية من متغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي .

أ ـ س = ١١٠ عندما تكون $\mu = ٩٥$ ، $\sigma = ٧,٥$

ب ـ س = ٤٥ عندما تكون $\mu = ٥٢$ ، $\sigma = ٤$

الحل :

أ ـ $\text{ى} = \dfrac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \dfrac{١١٠ - ٩٥}{٧,٥} = \dfrac{١٥}{٧,٥} = ٢$

ب ـ $\text{ى} = \dfrac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \dfrac{٤٥ - ٥٢}{٤} = \dfrac{-٧}{٤} = -١,٧٥$

مثال (١٠ ــ ٢٥) :

س متغير عشوائي متصل يخضع للتوزيع الطبيعي توقعه الرياضي ٨٠ وتباينه ٩ ، ادرس الاحتمالات الآتية :

أ ــ ح (س > ٨٤,٥)

ب ــ ح (س < ٧٨,٢)

جـ ــ ح (٨١,٥ < س < ٨٤)

الحل :

نوجد أولاً المتغيرات الطبيعية المعيارية المناظرة لحدود الفترات محل الدراسة حتى يمكن استخدام الجدول على النحو التالي :

أ ــ حيث أن س = ٨٤,٥ ، μ = ٨٠ ، σ^2 = ٩

$$\text{ي} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \frac{٨٤,٥ - ٨٠}{٣} = ١,٥$$

∴ ح (س > ٨٤,٥) = ح (ي > ١,٥)

= ١ ــ ح (ي < ١,٥)

= ١ ــ م (١,٥)

= ١ ــ ,٩٣٣٢ = ,٠٦٦٨

ومعنى هذا أننا ننظر في المدى الطويل أن لا تزيد (س) عن ٨٤,٥ إلاّ في حوالي ٦٧ حالة من كل ألف مشاهدة.

ب ــ

$$\text{ي} = \frac{٧٨,٢ - ٨٠}{٣} = \frac{-١,٨}{٣} = -,٦$$

∴ ح (س < ٧٨,٢) = ح (ي < ــ,٦)

= م (ــ,٦) = ,٢٧٤٢

$$\text{جـ ـ ى}_1 = \frac{٨١,٥ - ٨٠}{٣} = ,٥$$

$$\text{ى}_2 = \frac{٨٤ - ٨٠}{٣} = ١,٣$$

$$\therefore \text{ح} (٨١,٥ < \text{س} < ٨٤) = \text{ح} (,٥ < \text{ى} < ١,٣)$$

= م (١,٣) ـ م (,٥)

= ,٩٠٣٢ ـ ,٦٩١٥

= ,٢١١٧

ثانياً : توزيع كا^2 : (مربع كاي) Chi - Square Distribution

توزيع كا^2 من التوزيعات الهامة المستخدمة بكثرة في كثير من التطبيقات . وهذا التوزيع عبارة عن التوزيع الاحتمالي لمجموع مربعات متغيرات مستقلة موزعة توزيعاً طبيعياً معيارياً (بمعنى أن لها متوسطات تساوي صفر وتباين كل منها يساوي الواحد الصحيح) .

فإذا فرضنا أن لدينا المتغيرات الطبيعية :

$$\text{س}_1 \text{، س}_2 \text{، . . . . ، س}_\text{ن}$$

بحيث أن لكل منها متوسطاً حسابياً (μ) وانحرافاً معيارياً (σ) فإنه ـ كما سبق دراستنا في التوزيع الطبيعي ـ يمكن تحويل هذه المتغيرات إلى متغيرات طبيعية معيارية كما يلي :

$$\text{ص}_1 = \frac{\text{س}_1 - \mu}{\sigma} \text{، ص}_2 = \frac{\text{س}_2 - \mu}{\sigma} \text{، . . . . ، ص}_\text{ن} = \frac{\text{س}_\text{ن} - \mu}{\sigma}$$

وبفرض أن هذه المتغيرات مستقلة فإن $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}^2$ متغير يتبع توزيع كا^2 بدرجات حرية (ن) . بمعنى أن مجموع مربعات (ن) من المتغيرات

المستقلة الموزعة توزيعاً طبيعياً معيارياً يتبع توزيع كا^٢ بدرجات حرية (ن) وله دالة كثافة احتمال تأخذ الشكل التالي :

$$\text{ف (ص)} = \text{ك ص}^{\frac{\text{ن}}{٢} - ١} \text{ هـ}^{-\frac{\text{ص}}{٢}} \qquad \text{صفر} \leq \text{ص} \leq ١$$

حيث ك ، هـ مقادير ثابتة

ن تمثل درجات الحرية والتي يتوقف عليها شكل التوزيع .

خصائص التوزيع :

١ ـ الوسط الحسابي = ن

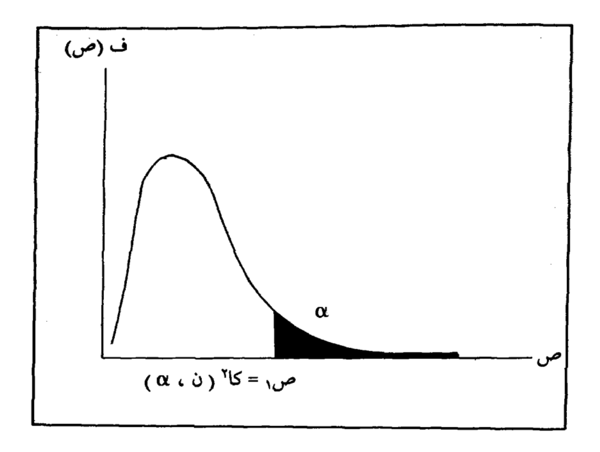
٢ ـ التباين = ٢ ن

$\therefore$ الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{٢ ن}}$

٣ ـ القيمة الشائعة (المنوال) = ن ـ ٢

٤ ـ هذا التوزيع ملتو ناحية اليمين (التواء موجب) ويقترب من التماثل كلما كبرت قيمة (ن) .

وهناك جداول معدة لتوزيع كا^٢ بحيث تعطي القيمة الموجودة للمتغير على المحور الأفقي التي يكون الاحتمال بعدها مساوياً مقداراً معيناً (أي يعطي الاحتمال في ذيل التوزيع) وبديهي أن يعتمد الجدول على درجات الحرية حيث يوجد منحنى لكل درجة من درجات الحرية . ويوضح الشكل التالي توزيع كا^٢ .



ونستخدم جدول كا٢ طالما كان عـدد درجات الحـرية ن < ٣٠ أمـا إذا كانت ن > ٣٠ فنستخدم جدول التوزيع الطبيعي كتقـريب لـ كـا٢ .

وجـدول كا٢ محسـوب على أسـاس ايجـاد احتمـال أن (ص ≤ ص١) وهي التي نعبر عنها رياضياً كما يلي :

$$ح \ (ص \leq ص_1) = \int_{ص_1}^{\infty} ف(ص) \, ء ص$$

وهي تعـطي المسـاحـة في ذيـل المنحنى كمـا يتضـح من الشكـل السابق .

فـإذا افترضنـا أن المساحـة المـظللة هي (α) فـإن (ص١) هي عبـارة عن قيمـة المتغير على المحـور الأفقي والتي تكون مسـاحـة المنحنى عنـدهـا

وحتى نهاية المنحنى والتي تمثلها المنطقة المظللة تساوي (α) عند درجات الحرية (ن) وهي التي نختصرها في الصورة :

$$ص_{1} = كا^{2} (ن ، \alpha)$$

وجدول (٢) في آخر الكتاب يعطي قيماً لتوزيع كا^{2} حيث يمثل العمود الأول فيه درجات الحرية من الرقم (١) حتى الرقم (٣٠) وبقية الأعمدة تعطي القيمة على المحور الأفقي (ص$_{1}$) التي تكون المساحة بعدها مساوية للاحتمال الموجود في قمة الأعمدة (وهي قيم مختارة) .

مثال (١٠ ــ ٢٦) :

باستخدام جدول كا^{2} (جدول ٢) أوجد

كا^{2} (١٠ ، ٢٥,) ، كا^{2} (٨، ٠١,)

الحـل :

من الجدول نجد أن :

كا^{2} (١٠ ، ٢٥,) = ١٢,٥٠

كا^{2} (٨ ، ٠١,) = ٢٠,١٠

مثال (١٠ ــ ٢٧) :

أوجد قيمة المتغير (ص) الذي يتبع كا^{2} بدرجات حرية (١٥) والتي يكون الاحتمال أكبر منها هو ٠١, ٠

الحـل :

من جدول (٢) نجد أن :

كا^{2} (١٥، ٠١,) = ٣٠,٦

مثال (١٠ ــ ٢٨) :

أوجد قيمة المتغيـر (ص) الذي يتبـع توزيـع كا^{٢} بـدرجات حـرية (١٢) والتي يكون الاحتمال أصغر منها هو ٠,٩٥

الحــل:

الاحتمال أكبر منها = ١ ـ ٩٥, = ٠٥,

ومن جدول (٢) نجد أن :

كا^{٢} (١٢ ، ٠٥,) = ٢١

ثالثاً: توزيع (ت) T - Distribution :

يستخـدم توزيـع (ت) في كثير من التـطبيقـات وخـاصـة في اختبـارات الفـروض الاحصائيـة بدلاً من التـوزيع الـطبيعي إذا كان حجم العينـة صغيـراً (أقل من ٣٠) والانحراف المعياري للمجتمع غير معروفاً .

وفي سنة ١٩٠٨ قدم وليم جوست توزيـع (ت) والذي عـرف بعد ذلـك باسم توزيع ستيودنت Student Distribution .

فـإذا كان لـدينا متغيـران مستقلان (س، ص) وكـان المتغير (س) يتبـع التوزيع الطبيعي المعياري والمتغير (ص) يتبع توزيع كا^{٢} بدرجـات حريـة (ن) فإن :

$$ع = س \div \sqrt{\frac{ص}{ن}}$$

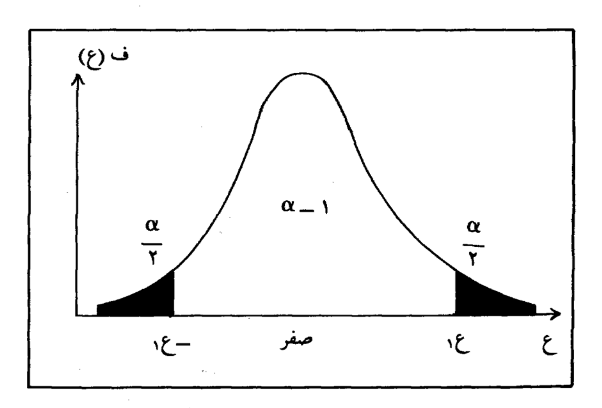
يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية (ن) حيث دالة الاحتمـال لهذا التـوزيع تأخذ الصورة التالية :

$$ف(ع) = أ \left(١ + \frac{ع^{٢}}{ن}\right)^{-\left(\frac{ن+١}{٢}\right)} \qquad -\infty > ع > \infty$$

حيث (أ) مقدار ثابت ، (ن) هي درجات الحرية والتي تحدد شكل التوزيع .

وتوزيع (ت) مثل التوزيع الطبيعي فهو توزيع احتمالي متصل ومتماثل ولكنه لا يلمس المحور الأفقي كالتوزيع الطبيعي كما أنه أكثر تشتتاً من التوزيع الطبيعي ويزداد هذا التشتت كلما قلّت درجات الحرية عن القيمة ٣٠ ويقل هذا التشتت إلى أن يتساوى مع تشتت التوزيع الطبيعي عندما تزيد درجات الحرية عن ٣٠ . ومن خصائص توزيع (ت) أيضاً أنه متماثل حول الصفر .

وباستخدام هذه الخصائص يمكن تحديد المساحة في طرف التوزيع (ت) على النحو التالي :



في الشكل السابق نفترض أن المطلوب هو معرفة القيمة على المحور الأفقي (ع١) التي تكون المساحة قبلها (أو بعدها) تساوي المقدار

($\frac{\alpha}{2}$) عند درجات الحرية (ن) حيث :

$ع_1$ = ت (ن ، $\frac{\alpha}{2}$) = ـــ ت (ن ، ١ ـــ $\frac{\alpha}{2}$) نظراً لتماثل التوزيع

وهي التي نحصل عليها من جدول قيم توزيع (ت) (جدول ٣) وفيه يخصص العمود الأول لدرجات الحرية وبقية الأعمدة تمثل قيمة (ت) على المحور الأفقي التي تعطي احتمالات مختلفة في ذيل التوزيع سواء من ناحية اليمين أو من ناحية اليسار أي أن الجدول يعطي المساحة المظللة الموضحة في الشكل السابق .

مثال (١٠ ـــ ٢٨) :

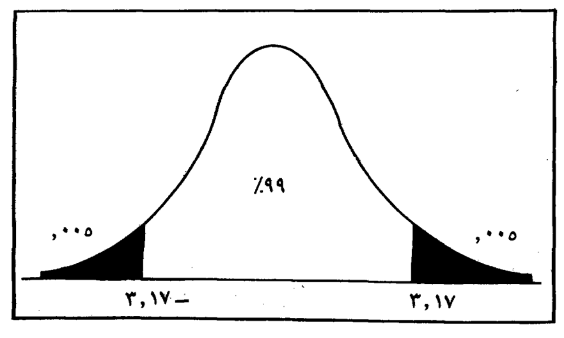
أوجد قيمة (ت) التي تكون المساحة قبلها أو بعدها مساوية (٠٠٥,) إذا كانت درجات الحرية تساوي ١٠ .

الحــل :

باستخدام جدول (٣) نجد أن :

ت (١٠ ، ٠٠٥,) = ـــ ت (١٠ ، ٩٩٥,) = ٣,١٧

ويمكن توضيحها في الشكل التالي :



وهو ما سوف نحتاج إليه عند دراستنا لاختبارات الفروض الاحصائية .

مثال (١٠ ــ ٢٩) :

أوجد قيمة ما يلي :

ت (١٥ ، ٠٢٥,) ، ت (٢٠ ، ٢,) ، ت (١٠ ، ٠٥,)

الحــل :

من جدول (٣) نجد أن :

ت (١٥ ، ٠٢٥,) = ٢,١٣

ت (٢٠ ، ٢,) = ٨٦,

ت (١٠ ، ٠٥,) = ١,٨١

رابعاً : توزيع (ف) F - Distribution :

هـذا التـوزيـع أيضـاً من التـوزيعـات الهـامـة في اختبــارات الفـروض الاحصائية وتحليـل التباين ولقـد عرف بهـذا الاسم تكريمـاً للعالم الاحصـائي فيشـر Fisher وقد يشـار في بعض الأحيان لهـذا التوزيـع بـاسم نسبـة التبـاين Variance Ratio .

ولإيجـاد دالة احتمـال هذا التـوزيع نفتـرض أن لدينـا متغيرين مستقلين ($س_١$ ، $س_٢$) كـل منهما يتبـع توزيـع $كا^٢$ بـدرجات حـرية ($ن_١$ ، $ن_٢$) على الترتيب . وعليه فإن المتغير :

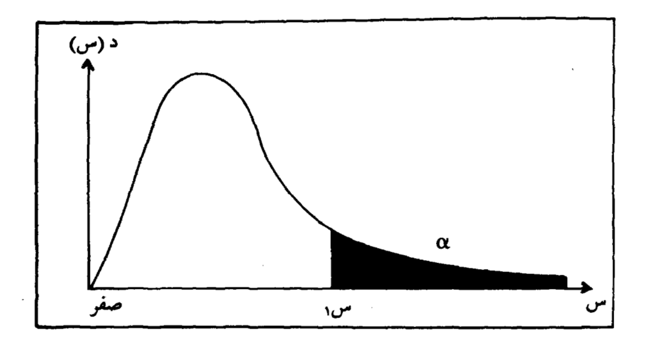
$$س = \left(\frac{س_١}{ن_١} \right) \div \left(\frac{س_٢}{ن_٢} \right)$$

يتبـع توزيـع (ف) بـدرجـات حريـة ($ن_١$ ، $ن_٢$) والتي يتـوقف عليهمـا شكل التوزيع ، ودالة كثافة احتماله تأخذ الصورة التالية :

$$د(س) = ك\ س^{\frac{ن_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{ن_1}{ن_2} س\right)^{-\frac{ن_1 + ن_2}{2}}$$

$$صفر \leq س \leq \infty$$

حيث (ك) مقدار ثابت . ويأخذ توزيع (ف) الشكل التالي :



ويلاحظ أن توزيع (ف) غير متماثل وملتو ناحية اليمين ويقترب أيضاً من التماثل بزيادة درجات الحرية . وحيث أن هذا التوزيع يعتمد على ($ن_1$ ، $ن_2$) فلقد تم إعداد جداول هذا التوزيع لمختلف القيم التي تأخذها ($ن_1$ ، $ن_2$) كما يتضح في جدول (٤) حيث يعطي قيمة (ف) على المحور الأفقي التي تكون المساحة بعدها تعادل مستوى المعنوية ٠١, وكذلك ٠٥, وعلى سبيل المثال يتضح من الشكل السابق أنه يمكن استخدام الجدول لإيجاد قيمة ($س_1$) على المحور الأفقي والتي تكون المساحة بعدها مساوية α (٠١, أو ٠٥,) لمختلف القيم التي تأخذها ($ن_1$ ، $ن_2$) ويمكن اختصارها على النحو التالي : $س_1 = ف\,(ن_1 ،\ ن_2 ،\ \alpha)$

مثال (١٠ ــ ٣٠) :

باستخدام جدول قيم توزيع (ف) أوجد القيمة التي تناظر درجات الحرية $ن_١$ = ١٠ ، $ن_٢$ = ٢٠

الحـل :

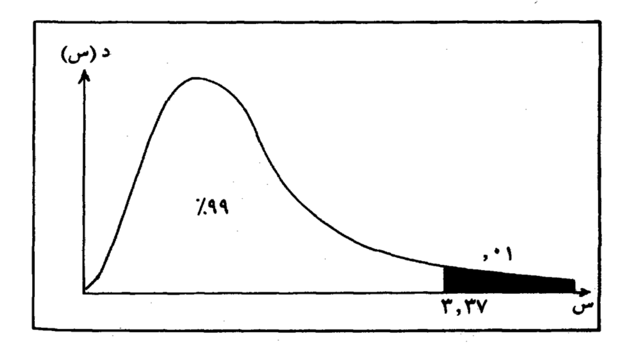
للكشف في جدول توزيع (ف) يلزم معرفة مستوى المعنوية (المساحة في ذيل التوزيع) .

أ ــ نفترض أن مستوى المعنوية = ٠١,

∴ من جدول (٤) نجد أن :

ف (١٠ ، ٢٠ ، ٠١,) = ٣,٣٧

وذلك بالنظر تحت العمود الذي به درجات الحرية (١٠) وأمام الصف الذي به درجات حرية (٢٠) ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي :

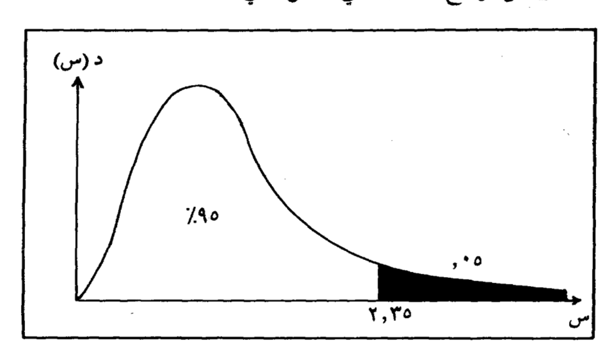


ب ــ بافتراض أن مستوى المعنوية = ٠٥,

∴ ف (١٠ ، ٢٠ ، ٠٥,) = ٢,٣٥

وذلك بالنظر في الجدول الخاص بمستوى المعنوية ٠٥, تحت العمود الذي به درجات الحرية (١٠) وأمام الصف الذي به درجات الحرية (٢٠).

ويمكن توضيح ذلك أيضاً في الشكل التالي :



مثال (١٠ ــ ٣١) :

باستخدام جدول قيم توزيع (ف) أوجد القيم التالية :

أ ــ ف(٣ ، ٩ ، ,٠١)

ب ــ ف(٥ ، ١٢ ، ,٠٥)

جـ ــ ف(٤ ، ١١ ، ,٠١)

الحــل :

بالكشف في جدول (٤) نجد أن :

أ ــ ف(٣ ، ٩ ، ,٠١) = ٦,٩٩

ب ــ ف(٥ ، ١٢ ، ,٠٥) = ٣,١١

جـ ــ ف(٤ ، ١١ ، ,٠١) = ٥,٦٧

تمارين الفصل العاشر

(١) متغيـر عشوائي (س) يتبع التوزيع الطبيعي حيث μ = ٣٠ ، σ = ٥ ،
أوجد قيمة (ى) المعيارية المقابلة لكل قيمة من قيم (س) التالية :

س = ٢٥ ، س = ٣٠ ، س = ٣٧,٥

س = ١٠ ، س = ٥٠ ، س = ٣٢

(٢) بـالنسبـة للمتغيـر (س) في التمـرين رقم (١) .. كم من الانـحـراف المعياري بعيداً عن الوسط الحسابي تبعد كل من القيم التالية :

س = ١٠ ، س = ٣٢,٥ ، س = ٣٠ ، س = ٦٠

(٣) أوجد قيمة ص التي تحقق :

أ - ح (ى > ص) = ٠٠١٣,

ب - ح (ـ ص > ى > ص) = ٠,٩٥

جـ - ح (ـ ص > ى > ص) = ٩٠,

د - ح (ـ ص > ى > ص) = ٦٨٢٦,

هـ - ح (ـ ص > ى > صفر) = ٠٥٩٦,

(٤) إذا كـان المتغير العشـوائي (س) يتبع التـوزيـع الـطبيعي بمتـوسط ١٠٠ وتبـاين ٦٤ . ارسم مخـططاً لشكـل المنحنى الـطبيعي والمسـاحـة المـطلوبة في كـل حالـة من الحـالات التـاليـة ثم أوجـد قيمـة احتمـال حدوثها :

أ - ح (μ + ٢ σ > س > μ - ٢ σ)

ب - ح (س ≤ ١٠٨)

جـ - ح (س ≥ ٩٢)

د ـ ح (٩٢ ≥ س ≥ ١١٦)

هـ ـ ح (٩٢ ≥ س ≥ ٩٦)

و ـ ح (٧٦ ≥ س ≥ ١٢٤)

ز ـ ح (١٠٢ ≥ س ≥ ١١٠)

(٥) في تجربة رمي زهرتي نرد أوجد :

أ ـ احتمال الحصول على مجموع يساوي ٥ .

ب ـ احتمال الحصول على مجموع يساوي ١١ على الأقل .

جـ ـ احتمال الحصول على مجموع يساوي ٣ على الأكثر .

(٦) كيس به ٧ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء . سحبت كرتان على التوالي أوجد احتمال أن تكون الكرتان بيضاويين إذا كان :

أ ـ السحب يتم بإرجاع .

ب ـ السحب يتم بدون إرجاع .

(٧) عند إلقاء أربع قطع نقود متوازنة وكانت (س) ترمز إلى عدد مرات ظهور الشعار . أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) ومن ثم أوجد دالة الاحتمال التجميعية وارسم كل منهما ثم اشتق توقع وتباين (س).

(٨) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير (ص) في الصورة :

ف (ص) = $\frac{١}{٣٠}$ صفر ≥ ص ≥ ٣٠

= صفر خلاف ذلك

أ ـ أوجد توقع (ص) ، تباين (ص).

ب ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعية .

جـ ـ أوجد ح (٢٥ < ص < ٣٠) .

الفصل الحادي عشر
تقدير فترات الثقة
واختبارات الفروض الاحصائية
Estimation of Confidence Intervals
and Hypothesis Testing

مقدمة :

تركزت دراستنا في الفصول السابقة على تقدير معالم التوزيع الاحتمالي لظواهر معيّنة (مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري ، . . .) وذلك باستخدام أسلوب العينة ، أي من خلال بيانات مأخوذة عن أجزاء من المجتمع الكلي للظواهر محل الدراسة .

فإذا سحبنا عيّنة حجمها (ن) مفردة من مجتمع دراسة معيّن فإننا نستطيع حساب بعض الاحصاءات مثل الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، وغيرهما . وهذه المقاييس الاحصائية تختلف باختلاف العينة المسحوبة من مجتمع الدراسة ، ولذلك إذا سحبنا مجموعة من العينات ذات الحجم (ن) من مجتمع الدراسة فإننا سوف نحصل من كل واحدة على مقاييس تختلف عن بعضها البعض لنفس المعالم وبذلك نحصل على توزيع يسمى بتوزيع المعاينة لهذه المعالم . فمثلاً إذا كان المقياس الاحصائي المطلوب هو الوسط الحسابي فإن توزيعه من العيّنات المختلفة يسمى بتوزيع العيّنة للمتوسطات الحسابية أو توزيع المعاينة للوسط الحسابي .

وفي كثيـر من المشاكـل العمليـة قـد نحتـاج إلى اتخـاذ قـرارات تخص مجتمع الدراسة وذلك على ضوء نتائج دراسة لعينة من هذا المجتمع . ومثل هذه القرارات تسمى بالقرارات الإحصـائية . فعلى سبيـل المثال ، قـد نحتاج أن نقرر بناء على بيـانات عيّنـة ما إذا كـان دواء جديـد يؤثر بشكـل حقيقي في شفـاء مـرض معيّن ، ومـا إذا كـانت طـريقـة إنتـاج أكثـر ربحيـة من طـريقـة أخـرى . وكذلـك قد نحتـاج إلى تحديـد لـدرجـة ثقتنـا في التقـديـرات التي حصلنا عليها لمعالم المجتمع أو نسب الحدوث فيه .

ولذلك سوف يعالج هذا الفصل :

١ ــ بناء فترات الثقة لمعالم المجتمع ونسب الحدوث فيه .

٢ ــ اختبارات الفروض الاحصائية .

أولاً : تقدير فترات الثقة

Estimation of Confidence Intervals

يمكن بناء فترات الثقة لمعالم المجتمع مثل الوسط الحسابي وذلك باستخدام معلوماتنا عن التوزيعات الاحتمالية في الفصل السابق وكذلك باستخدام القاعدة التالية : ــ

قاعدة :

إذا كان هناك عيّنة حجمها (ن) مفردة مأخوذة من مجتمع (س) توقعه (μ) وتباينه (σ^2) فإن المتوسط الحسابي $\bar{س}$ هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع (μ) وتباين $\frac{\sigma^2}{ن}$. أي أنه إذا كانت (σ) هي الانحراف المعياري للمتغير (س) فإن الانحراف المعياري للوسط الحسابي $\bar{س}$ لعينة عدد مفرداتها (ن) هو $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ويسمى بالخطأ المعياري تمييزاً له عن الانحراف المعياري للمتغير نفسه .

ولهذه القاعدة أهمية خاصة في تقدير مركز المجتمع كما يتضح فيما يلي :

(أ) تقدير القيمة المتوقعة لمركز المجتمع (μ) بفترة ثقة من بيانات عينة :

١ ــ عندما يكون تباين المجتمع (σ^2) معلوماً :

تتمثل خطوات إيجاد تقدير لمركز المجتمع (μ) على النحو التالي : ــ

ـ نحسب الوسط الحسابي من بيانات العينة .

ـ نحسب الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي أي الخطأ المعياري $= \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}$

ـ باستخدام القاعدة السابقة والتحويلة (ى) في الفصل السابق فإن المتغير $\text{ى} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\sigma \div \sqrt{\text{ن}}}$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

وبافتراض فترة ثقة ٩٥٪ نعلم أن :

$$\text{ح}\left(-\text{١,٩٦} < \text{ى} < \text{١,٩٦}\right) = \text{,٩٥}$$

$$\text{ح}\left(-\text{١,٩٦} < \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\sigma \div \sqrt{\text{ن}}} < \text{١,٩٦}\right) = \text{,٩٥}$$

$$\text{ح}\left(-\text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} < \bar{\text{س}} - \mu < \text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{,٩٥}$$

أي أن :

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} - \text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} < \mu < \bar{\text{س}} + \text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{,٩٥}$$

أي أن القيمة المتوقعة للمجتمع (μ) سوف تنحصر في الفئة :

$$\left(\bar{\text{س}} - \text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \text{ ، } \bar{\text{س}} + \text{١,٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right) \text{ بثقة ٩٥٪}$$

وبالمثل فإن :

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} - \text{٢,٥٨}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} < \mu < \bar{\text{س}} + \text{٢,٥٨}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{,٩٩}$$

أي أن القيمة المتوقعة (μ) سوف تنحصر في الفئة :

$$\left(\bar{س} - ٢,٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \text{ ، } \bar{س} + ٢,٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right)$$ بثقة ٩٩٪

مثال (١١ ــ ١) :

أخذت عينة عشوائية حجمها ٤ مفردات من مجتمع طبيعي توقعه (μ) وتباينه ٠٤,، وكانت المشاهدات هي ١٤,٨ ، ١٥,٤ ، ١٥,٦ ، ١٤,٢ ، أوجد تقديراً للمتوسط الحسابي للمجتمع بثقة ٩٥٪ .

الحــــل :

$$ن = ٤$$

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$$

$$\sigma = \sqrt{,٠٤} = ,٢$$

$$ح \left(\bar{س} - ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} < \mu < \bar{س} + ١,٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right) = ,٩٥$$

$$ح \left(١٥ - ١,٩٦ \frac{,٢}{٢} < \mu < ١٥ + ١,٩٦ \frac{,٢}{٢} \right) = ,٩٥$$

$$ح \left(١٥ - ,١٩٦ < \mu < ١٥ + ,١٩٦ \right) = ,٩٥$$

أي أن القيمة المتوقعة للمجتمع (μ) تنحصر في الفئة (١٤,٨٠٤ ، ١٥,١٩٦) بثقة ٩٥٪ .

٢ ــ عندما يكون تباين المجتمع (σ^2) غير معلوم :

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العيّنة له توزيع طبيعي توقعه (μ)

وتبـاينه (σ^2) غيـر معلوم فيمكننا بـاستخدام بيـانات العينـة ايجاد تقـدير غيـر متحيز للتباين (σ^2) باستخدام التقدير :

$$ع^2 = \frac{1}{ن - 1} \left\{ مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن} \right\}$$

وفي هذه الحالة يصبح المتغير العشوائي :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{ع \div \sqrt{ن}}$$ له توزيع (ت) بدرجات حرية (ن – ١).

وبعد حساب هذه القيمة لحـدود الثقة المعلومـة من جدول تـوزيع (ت) نستخـدم العـلاقـة التـاليـة والتي تعـطي فتـرة ثقـة ١٠٠ (١ – α) ٪ للقيمـة المتوقعة (μ) .

$$ح\left(\bar{س} - ت_{ن+1،\frac{\alpha}{2}} \frac{ع}{\sqrt{ن}} < \mu < \bar{س} + ت_{ن-1،1-\frac{\alpha}{2}} \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)$$

= ١٠٠ (١ – α) ٪ .

حيث (α) ترمز إلى مستوى المعنوية .

مثال (١١ – ٢) :

أخـذت عينة عشـوائيـة حجمهـا ٤ مفـردات من مجتمـع طبيعي تـوقعـه (μ) وتباينه (σ^2) وكانت المشاهدات هي : ــ

١٤,٨ ، ١٥,٤ ، ١٥,٦ ، ١٤,٢

أوجـد تقديـراً لمركـز المجتمع (μ) بثقـة ٩٩٪ (عند مستـوى معنويـة ٠,٠١) .

الحــل :

الوسط الحسابي للعينة ($\bar{س}$) = $\frac{مجـ س}{ن}$ = $\frac{٦٠}{٤}$ = ١٥

ولتقدير التباين نستخدم العلاقة :

$$ع^٢ = \frac{١}{٣} \left(٩٠١,٢ - \frac{(٦٠)^٢}{٤} \right) = ,٣٩٩$$

$$\therefore ع = ,٦٣٢$$

ومن جدول توزيع (ت) نجد أن : $ت_{٣، ,٠١} = ٥,٨٤١$

∴ القيمة المتوقعة للمجتمع (μ) تنحصر في الفئة :

$$(١٥ - ٥,٨٤١ \times \frac{,٦٣٢}{٢} \text{ ، } ١٥ + ٥,٨٤١ \times \frac{,٦٣٢}{٢}) \text{ بثقة } ٩٩٪$$

أي في الفئة (١٣,١٥٤ ، ١٦,٨٤٦) بثقة ٩٩٪ .

ملاحظــة هــامــة :

ذكرنا فيما سبق أن توزيع (ت) يؤول إلى التوزيـع الطبيعي عنـدما تكبـر (ن) كبـراً كافيـاً ، وعليه فعنـدما تكـون (ن > ٣٠) وإذا كـان تبـاين المجتمـع غيـر معلوم يمكننا حسـاب ($ع^٢$) كتقديـر غير متحيـز للتباين ثم نـوجد فتـرة ثقة باستخدام التوزيع الطبيعي كما سبق في الحالة (١) .

(ب) تقدير فترة الثقة لنسبة الحدوث في المجتمع :

عنـد دراسة نسبـة حدوث ظـاهرة مـا في المجتمع مثـل نسبة الأميـة في المجتمـع أو نسبة المعيب في انتـاج معيّن أو نسبـة الـذين يـزيـد عمـرهم عن سن معينة . فإذا أجرى بحث معيّن على مجتمع معيّن حجمه (ن) وكان عدد مـرات الحدوث هـو (ك) فإن نسبـة الحدوث في المجتمـع ح = $\frac{ك}{ن}$ وغالبـاً ما تكـون هـذه النسبـة غيـر معلومـة ويصبـح من الضـروري تقـديـر هـذه النسبـة

باستخدام عيّنة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع حجمها (ن) ، ومن ثم فيمكننا الحصول على تقدير نسبة الحدوث في المجتمع على النحو التالي :

$$\hat{خ} = \frac{ر}{ن}$$ حيث ر تمثل عدد مرات الحدوث في العينة .

ولقد ثبت أنه عندما تكون (ن) كبيرة وحينما لا تكون النسبة في المجتمع صغيرة جداً أو كبيرة جداً فإن النسبة خ تقترب من التوزيع الطبيعي

بتوقع ح وتباين $\frac{ح(١ - ح)}{ن}$

وعليه فإن المتغير العشوائي :

$$ى = \frac{\hat{خ} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}}$$

له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري . وحيث أن (ح) غير معلومة فنستخدم النسبة :

$\frac{\hat{خ}(١ - \hat{خ})}{ن}$ كتقدير غير متحيز للتباين $\frac{ح(١ - ح)}{ن}$

وباستخدام العلاقات السابقة يمكن التوصل إلى أن :

(١) نسبة الحدوث في المجتمع (ح) تقع في الفترة :

$$\left(\hat{خ} - ١,٩٦\sqrt{\frac{\hat{خ}(١ - \hat{خ})}{ن}} ، \hat{خ} + ١,٩٦\sqrt{\frac{\hat{خ}(١ - \hat{خ})}{ن}}\right)$$ بثقة ٩٥٪

(٢) نسبة الحدوث في المجتمع (ح) تقع في الفترة :

$$\left(\hat{خ} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{خ}(1-\hat{خ})}{ن}} \text{ ، } \hat{خ} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{خ}(1-\hat{خ})}{ن}}\right) \text{ بثقة } 99\%$$

مثـال (١١ ــ ٣) :

في محاولة لتقدير نسبة الأمية في مدينة ما أخذت عينـة عشوائيـة مكونـة من ٢٠٠ شخص فكـان عـدد الأميين ١٢٠ شخصـاً . قـدر نسبـة الأميـة في المدينة بثقة ٩٥ ٪ . وإذا كان عـدد السكان في هـذه المدينـة يقدر بـ ٢٠٠٠٠ نسمة . أوجد تقدير لعدد الأميين بها .

الحــل :

$$\text{نسبة الأمية في العينة } \hat{خ} = \frac{120}{200} = ,6$$

∴ نسبة الأمية في المدينة (ح) تقع في الفترة :

$$\left(\hat{خ} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{خ}(1-\hat{خ})}{ن}} \text{ ، } \hat{خ} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{خ}(1-\hat{خ})}{ن}}\right) \text{ بثقة } 95\%$$

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = ,6 - 1,96\sqrt{\frac{,6 \times ,4}{200}}$$

$$= ,6 - ,068 = ,532$$

$$\text{والحد الأعلى لفترة الثقة} = ,6 + ,068 = ,668$$

أي أن نسبـة الأمية في المـدينة تقـع بين (٥٣٢, ، ٦٦٨,) بثقـة ٩٥٪
كما أن عدد الأميين في هذه المدينة يتراوح بين (١٠٦٤٠ ، ١٧٣٦٠) .

ثانياً : اختبارات الفروض الاحصائية

Test of Hypothesis

الفروض الاحصائية Statistical Hypothesis :

في محـاولـة للوصـول إلى قـرار إحصـائي فمن المفيـد وضــع فـروض وتخمينات أو تقارير مبدئية عن معالم التـوزيع الاحتمـالي لمجتمعات الـظواهر مـوضع الـدراسة . مثـل هذه الفـروض أو التقاريـر المبدئيـة والتي قـد تكـون صحيحـة أو غير صحيحـة ، تسمى بالفـروض الاحصـائيـة ، ويسمى الفـرض الاحصـائي عـادة بفـرض العـدم Null Hypothesis أي عـدم التغيـر بمعنى أنـه تحـديـد مبـدئي لقيمـة المعلمـة Parameter أو المؤشـر الإحصـائي مـوضـــوع الاختبـار فإذا قبلنـا هذه القيمـة نتيجة لـلاختبار كـان معنى ذلك أنـه لم يحدث تغيـر معنوي أو أسـاسي في قيمة هـذا المؤشر أمـا إذا رفضنا الفـرض العـدمي نتيجة للاختبار كان ،معنى ذلك أن تغيراً جـوهريـاً أو معنويـاً قد حـدث في قيمة المؤشر الاحصائي .

المختبر الاحصائي Test Statistic :

هو عبارة عن علاقة ريـاضية تـربط المعلمة التي يجـري الاختبار عليهـا بقيمتهـا المحسوبـة من العينـة المـأخـوذة من المجتمـع لـذلـك فـإن المختبـر الاحصائي هو دالة في قيم مفردات العينة وبالتـالي فهو متغيـر عشوائي لـه دالة توزيع احتمالي يلزم أن يكون معلوماً لاستخدامه في اختبارات الفروض .

فمثـلاً إذا أردنـا اختبـار أن قيمـة تــوقـع مجتمـــع هي (μ_0) (أي أن الفـرض العـدمي قبــل إجـراء الاختبـــار هـو $\mu = \mu_0$) وإذا كـــانت $\bar{س}$ هي

الوسط الحسابي المحسوب من بيانات عينة من المجتمع حجمها (ن) كتقدير للقيمة المتوقعة فإن :

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma \div \sqrt{ن}}$$

حيث (σ) هي القيمة الحقيقية للانحراف المعياري في المجتمع، هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري وتسمى بالمختبر الاحصائي . ونتيجة لمعرفة التوزيع الاحتمالي للمختبر الاحصائي فإننا نستطيع مقارنة قيمته المحسوبة بقيمته المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ومن ثم نستطيع قبول أو رفض الفرض العدمي .

الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني :

Type 1 Error and Type 2 Error :

نتيجة للقرارات الاحصائية المتخذة بناء على معلومات عينة حول فروض إحصائية معينة يمكن التميز بين أربع حالات ممكنة هي :

١ ــ أن يكون الفرض الإحصائي صحيحاً ، والقرار بناء على الاختبار الاحصائي يقول بأنه صحيح (لا خطأ هنا) .

٢ ــ أن يكون الفرض الاحصائي صحيحاً والقرار يقول بأنه خاطىء (هنا نرتكب خطأ نسميه بخطأ من النوع الأول) .

٣ ــ أن يكون الفرض الاحصائي خاطئاً والقرار يقول بأنه صحيح (هنا نرتكب خطأ نسميه بخطأ من النوع الثاني) .

٤ ــ أن يكون الفرض الاحصائي خاطئاً والقرار يقول بأنه خاطىء (لا خطأ هنا)

ولكي تكون اختبارات الفروض أو قواعد اتخاذ القرارات جيدة ، فيجب أن تصمم بحيث تؤدي إلى تقليل أخطاء القرار . ولكن ذلك ليس بالأمر السهل حيث أن نقص أحد أنواع الأخطاء يؤدي بشكل عام إلى زيادة في النوع الآخر (مع بقاء حجم العينة ثابت) . ومن الناحية العملية فإن أحد الأخطاء قد يكون أكثر أهمية من النوع الآخر ، لذلك فإن الحل الوسط هو بتحديد الخطأ الأكثر أهمية وخطورة . والطريقة الوحيدة في تقليل حجم الخطأين هي بزيادة حجم العينة وقد يكون ذلك غير ممكن أو مكلف .

مستوى المعنوية Level of Significance :

هو احتمال الخطأ الذي يحدده الباحث لنفسه قبل بداية الاختبار في رفض الفرض الصحيح ، وبمعنى آخر هو المخاطرة المحتملة في رفض الفرض الاحصائي عندما يكون صحيحاً (الخطأ من النوع الأول) ويرمز له بالرمز α .

ومن الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى معنوية ٠٥, أو ٠١, وإن كانت هناك قيم أخرى مختلفة . وعلى سبيل المثال ٠٥, تعني أن هناك ٥ فرص من ١٠٠ أننا سوف نرفض الفرض الإحصائي عندما يجب أن نقبله ، أي أننا واثقون من قرارنا بنسبة ٩٥٪ في أننا سنتخذ القرار السليم . ونقول في هذه الحالة بأننا رفضنا الفرض العدمي عند مستوى معنوية ٠٥, .

الفرض البديل Alternative Hypothesis :

في أي اختبار إحصائي للفروض يوجد لكل فرض عدمي فرض بديل مناظر له . فعلى سبيل المثال إذا كان الفرض العدمي هو $\mu = \mu_o$

فإن الفرض البديل من الممكن أن يكون :

$\mu > \mu_o$ أو $\mu < \mu_o$ أو $\mu \neq \mu_o$

ومعرفة الفرض البديل ضرورية جداً في تحديد الخطأ من النوع الثاني وكذلك في تحديد نوع الاختبار الذي بمقتضاه قد نقبل أو نرفض الفرض العدمي . وهناك ثلاثة أنواع شائعة من الاختبارات هي : ـ

(١) اختبار الطرف الأيسر Left Side Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي $\mu = \mu_\circ$ في مقابل الفرض البديل $\mu < \mu_\circ$.



فإذا كانت القيمة (ى) المحسوبة أقل من القيمة (س) المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعيارى وفقاً لمستوى المعنوية المعروف مسبقاً فإننا نرفض الفرض أما إذا كانت (ى) أكبر من (س) فإننا نقبل الفرض .

(٢) اختبار الطرف الأيمن Right Side Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي $\mu = \mu_\circ$ في مقابل الفرض البديل $\mu > \mu_\circ$.



فإذا كانت القيمة (ى) المحسوبة أكبر من القيمة (ص) المستخرجة من الجدول عند مستوى المعنوية المحدد فإننا نرفض الفرض العدمي والعكس صحيح إذا كانت (ى) أقل من (ص) فإننا نقبل الفرض .

(٣) اختبار الطرفين Two-Tailed Test :

يجري هذا الاختبار عندما يكون الفرض العدمي $\mu = \mu_\circ$ في مقابل الفرض البديل $\mu \neq \mu_\circ$.



وفي هذه الحالة فإننا نقبل الفرض العدمي إذا كانت قيمة (ى) المحسوبة داخلة في الفترة (س ، ص) المستخرجة من الجدول والعكس الصحيح مع ملاحظة أن س = – ص حيث أن التوزيع متماثل .

وسوف نعرض فيما يلي بعض النماذج من اختبارات الفروض : ــ

(١) اختبارات الفروض الإحصائية للقيمة المتوقعة (المتوسط) للمجتمع :

(أ) عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ^2) معلوماً :

بفرض أننا سحبنا عيّنة من مجتمع دراسة موزع توزيعاً طبيعياً بتوقع (μ) وتباين (σ^2) ، فإذا كانت (σ^2) معلومة ، فإن اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بقيمة (μ) (توقع المجتمع) تعتمد على توزيع المعاينة للمتغير $\bar{س}$ (الوسط الحسابي للعينة) وحيث أن $\bar{س}$ يتوزع توزيعاً

طبيعياً بتوقع (μ) وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$، وحيث ان قيمة (σ^2) للمجتمع معلومة ، كذلك فإن :

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

هو عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ، يمكن استخدام هذه النتيجة في اختبار الفروض الاحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة للمجتمع وذلك باتباع الخطوات التالية :

(١) نحدد الفرض الأصلي (الفرض العدمي) .

(٢) نحدد الفرض البديل ، ومنه يتحدد نوع الاختبار واتجاهه (من طرف واحد أو طرفين) .

(٣) تحديد التوزيع المستخدم في الاختبار .

(٤) تحديد منطقة قبول ورفض الفرض العدمي ، أي بمعنى آخر تحديد مستوى المعنوية (وغالباً ما تأخذ ٠,٠٥ أو ٠,٠١) والذي يحدد الحدود الفاصلة بين منطقتي القبول أو الرفض بناء على نوع الاختبار ونوع التوزيع المستخدم .

(٥) تحسب قيمة المختبر الاحصائي المناسب من بيانات العينة ، وبناء على قيمته يمكن تحديد قبول أو رفض فرض العدم . فإذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي المحسوب من العينة في منطقة الرفض ، نرفض فرض العدم والعكس صحيح كما يتضح في الأمثلة التالية .

* حتى إذا لم يكن توزيع المجتمع الأصلي طبيعياً فإن توزيع (ى) في

هـذه الحالـة يؤول إلى التوزيـع الطبيعي المعيـاري إذا كـان حجم العينـة كبيراً (ن ≤ ٣٠ في العادة) .

مثال (١١ ـ ٤) :

شركة أجهزة كهربائية تنتج نوعاً من لمبات الإضاءة . فإذا علم أن عمر اللمبـة يتوزع تـوزيعـاً طبيعياً بمتـوسط ١٧٥٠ سـاعـة وتبـاين ١٤٤ سـاعـة . وأرادت الشركة أن تختبـر جودة انتـاجها فـأخذت عينـة من ٣٦ لمبة ووجـد أن متـوسط عمرهـا ١٧٣٠ ساعـة . فهل يستـدل من هذه العينـة أن متوسط عمـر اللمبـة قد انخفض (أي أن إنتـاج الشركـة قـد سـاء عن المعـدل المعـروف) وذلك بمستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحـــل : μ = ١٧٥٠ ، σ^2 = ١٤٤ ، ن = ٣٦ ، سَ = ١٧٣٠

الفرض العدمي : μ = ١٧٥٠ (بمعنى أن إنتاج الشركة لم يتغير) .

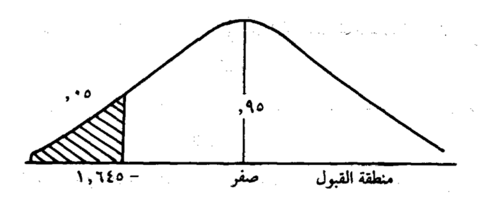
الفـرض البـديـل : μ < ١٧٥٠ (بمعنى أن إنتـاج الشـركـة قـد سـاء عن المعدل) .

يتضـح من الفـرض البـديـل أنـه يجب اتبـاع اختبـار الـطرف الأيســر والتـوزيع المستخـدم هو تـوزيع سَ ويتبـع التـوزيـع الـطبيعي وعليـه فسـوف نـرفض الفرض العـدمي إذا كانت قيمـة المختبـر الإحصـائي أقـل من القيمـة (- ١,٦٤٥) المستخـرجـة من الجـدول الـطبيعي المعيـاري عنـد مستـوى المعنوية ٠,٠٥ ، كما يتضح في الشكل .

والمختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{سَ - \mu}{\sigma \div \sqrt{ن}} = \frac{١٧٣٠ - ١٧٥٠}{١٢ \div \sqrt{٣٦}}$$

$$= \frac{-٢٠}{٢} = -١٠$$



وحيث أن قيمة (ى) المحسوبة أقل من قيمة (ى) المستخرجة من الجدول (أي تقع في منطقة الرفض) لذلك نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل . وهذا يدل على أن إنتاج الشركة قد ساء عن المعدل بدرجة ثقة ٩٥ ٪ .

ملاحظة :

إذا أردنا أن نكون أكثر حرصاً في اتخاذ القرار فإننا نستطيع أن نقلل من قيمة (α) . فإذا أخذنا (α) تساوي ٠١, فإن القيمة المعيارية المناظرة لها تساوي (-٢,٣٢) . وفي هذه الحالة أيضاً يمكن القول أن الإنتاج قد ساء عن المعدل بدرجة ثقة ٩٩٪ .

مثال (١١ ــ ٥) :

إذا كان متوسط الإنتاج اليومي بمصنع يتبع أسلوباً معيناً في الإنتاج هو ١٠٠ وحدة بانحراف معياري قدره ٨ ، فإذا رأت إدارة المصنع تغيير أسلوب الإنتاج من أجل زيادة الإنتاج فاستخدمت أسلوباً جديداً لمدة ١٦ يوماً فكان متوسط الإنتاج في خلال هذه المدة هو ١٠٥ وحدة . فهل تدل تجربة استخدام الأسلوب الجديد على زيادة الإنتاج عند مستوى المعنوية ٠٥,

الحل :

$\bar{س}$ = ١٠٥ ، ن = ١٦ ، σ = ٨ ، μ = ١٠٠

الفرض العدمي : $\mu = ١٠٠$ (أي أن الأسلوب الجديد لم يؤثر في زيادة الإنتاج) .

الفرض البديل: $\mu > ١٠٠$ (يعني أن الإنتاج قد زاد باستخدام الأسلوب الجديد) .

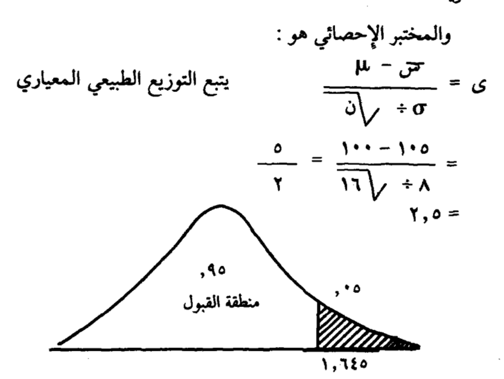
ويتضح من الفرض البديل أنه يجب استخدام اختبار الطرف الأيمن وعليه فسوف نرفض الفرض العدمي إذا كانت قيمة المختبر الإحصائي المحسوبة أكبر من القيمة المناظرة لها في جدول التوزيع عند مستوى المعنوية المحدد .

والمختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma \div \sqrt{ن}}$$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

$$= \frac{١٠٥ - ١٠٠}{٨ \div \sqrt{١٦}} = \frac{٥}{٢}$$

$$= ٢,٥$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن القيمة المناظرة لها عند مستوى المعنوية ٠٥, يساوي ١,٦٤٥ .

وحيث أن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المستخرجة من الجدول فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بأنه ليس هناك تأثير على الإنتاج باستخدام الأسلوب الجديد وبعبارة أخرى فإنه يمكن القول أن هناك تأثيراً على زيادة الإنتاج نتيجة استخدام الأسلوب الجديد بثقة ٩٥٪ .

(ب) عندما يكون تباين المجتمع الأصلي (σ^2) مجهولاً :

في هذه الحالة نستخدم التقدير :

$$ع^2 = \frac{1}{ن - 1} \left\{ مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن} \right\}$$

كتقدير غير متحيز للتباين وبالتالي فإن المختبر الإحصائي :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{ع \div \sqrt{ن}}$$

يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية (ن - ١) ومن ثم فإن طريقة الاختبار في هذه الحالة لا تختلف عن الطريقة السابقة إلاّ في استخدام توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعي .

مثال (١١ ــ ٦) :

مصنع للمعادن ينتج نوعاً من السبائك المخلوطة من عدة معادن علماً بأن هذا النوع من الخليط ينصهر عند درجة حرارة ١٤٩٥ درجة مئوية . وللتأكد من كفاءة أجهزة المصنع أخذت عينة من السبائك المصنوعة في ٧ أيام مختلفة فكانت درجة انصهارها كالآتي :

١٥٠٩ ، ١٥٠١ ، ١٤٩٣ ، ١٤٩٩ ، ١٥٠٥ ، ١٤٨٣ ، ١٤٩٤ .

اختبر ما إذا كانت هذه العينة تتفق مع درجة انصهار الخليط عند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحـــل : μ = ١٤٩٥ ، ن = ٧

ومن بيانات العينة يمكن تقدير الوسط الحسابي والانحراف المعياري على النحو التالي :

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = ١٤٩٧,٧١$$

$$\therefore ع^٢ = \frac{١}{٦}\left\{مجـ س^٢ - \frac{(مجـ س)^٢}{٦}\right\}$$ وبالتعويض نجد أن

$$ع = ٨,٦١٦$$

الفرض العدمي : $\mu = ١٤٩٥$

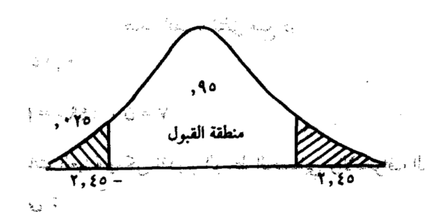
الفرض البديل : $\mu \neq ١٤٩٥$ (نستخدم اختبار الطرفين)

المختبر الاحصائي هو :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{ع \div \sqrt{ن}}$$ يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية ٦

$$= \frac{١٤٩٧,٧١ - ١٤٩٥}{٨,٦١٦ \div \sqrt{٧}} = ,٨٣٢$$

وبالبحث في جدول توزيع (ت) مقابل درجة الحرية (٦) عن قيمة (ت) التي تحقق $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠٢٥, فنجد أنها تساوي ٢,٤٥ ونظراً للتماثل فإن القيمة الأخرى هي (- ٢,٤٥) .



وحيث أن قيمة (ت) المحسوبة من العينة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأن هذه العينة تنتمي إلى ذلك الخليط الذي ينصهر عند درجة حرارة ١٤٩٥ درجة مئوية بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ ـ ٧) :

إذا علمت أن مستوى الدخل الشهري في بلد ما هو ٢٠٥ دينار ، ولكن إحدى المؤسسات الدولية ادعت بأنه أقل من ذلك ولاختبار هذا الادعاء أخذت عيّنة من ٣٠ مفردة من هذا المجتمع وحسب متوسطها الحسابي (متوسط الدخل الشهري) فكان ١٦٤,٥ دينار وتباينها ١٩٦ . اختبر فرض العدم عند مستوى معنوية ٠١, .

الحــــل :

μ = ٢٠٥ ، ن = ٣٠ ، $\bar{س}$ = ١٦٤,٥ ، $ع^2$ = ١٩٦

الفرض العدمي : μ = ٢٠٥

الفرض البديل : μ < ٢٠٥ (اختبار الطرف الأيسر)

المختبر الإحصائي هو :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{ع \div \sqrt{ن}}$$ يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية ٢٩

$$= \frac{٢٠٥ - ١٦٤,٥}{١٤ \div \sqrt{٣٠}} = \frac{-٤٠,٥}{٢,٥٥٦} = -١٥,٨٤$$

وبالكشف في جدول (ت) المقابلة لدرجة الحرية ٢٩ نجد أن قيمة (ت) التي تجعل مساحة منطقة الرفض ٠١, وهي (-٢,٤٦٢)

وحيث أن قيمة (ت) المحسوبة أقل من قيمة (ت) الجدولية ، أي أنها

تقع في منطقة الرفض. لذلك فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بأن الدخل الشهري للفرد في هذه الدولة هو ٢٠٥ دينار ونقبل ادعاء المؤسسات الدولية في هذا الشأن بثقة ٩٩٪ .



(٢) اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين :

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين نلجأ إلى سحب عينة عشوائية من كلا المجتمعين ونفترض أننا حصلنا على النتائج التالية .

	العينة الأولى	العينة الثانية
الوسط الحسابي	$\overline{س}_1$	$\overline{س}_2$
الانحراف المعياري	$ع_1$	$ع_2$
حجم العينة	$ن_1$	$ن_2$

وبافتراض أن (μ_1 ، μ_2) هي القيمة المتوقعة للمجتمع الأول والثاني على الترتيب . وفي هذه الحالة فإن

الفرض العدمي هو ($\mu_1 = \mu_2$) في مقابل أي من الفروض البديلة التالية :

$\mu_1 < \mu_2$ نستخدم اختبار الطرف الأيسر

$\mu_1 > \mu_2$ نستخدم اختبار الطرف الأيمن

$\mu_1 \neq \mu_2$ نستخدم اختبار الطرفين

وتعتمد الاختبارات في هذه الحالة على توزيع العينات للمتغير العشوائي ($\bar{س}_1 - \bar{س}_2$) والذي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ($\mu_1 - \mu_2$) . وتباين يتوقف على ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً أم لا .

* إذا كان تباين المجتمعين (σ_1^2 ، σ_2^2) معلوماً فإن :

تباين ($\bar{س}_1 - \bar{س}_2$) = تباين ($\bar{س}_1$) + تباين ($\bar{س}_2$)

$$= \frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}$$

بافتراض استقلال المجتمعين .

* إذا كان تباين المجتمعين غير معلوماً فنستخدم تقديراً لهما من بيانات العينتين المسحوبتين من كل منهما وهما $ع_1^2$ ، $ع_2^2$ ويصبح تقدير تباين الفرق بين المتوسطين هو :

$$\text{تباين} (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}$$

وفيما يلي نلخص المختبر الإحصائي في كل حالة :

(أ) إذا كانت σ_1^2 ، σ_2^2 معلومتي القيمة :

في هذه الحالة نستخدم المختبر الإحصائي :

$$ى = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي ($\mu_1 = \mu_2$) . ويجري الاختبار كما سبق بمقارنة قيمة (ى) المحسوبة بالقيمة المناظرة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية المحدد ونرفض أو نقبل الفرض على حساب نتيجة المقارنة والتي يحددها الفرض البديل ونوع الاختبار المناظر له .

(ب) إذا كانت σ_1^2 ، σ_2^2 مجهولتين وحجم العينتين كبيراً :

في هذه الحالة نستخدم تقديراتنا لتباين المجتمعين من بيانات العينتين وهما $ع_1^2$ ، $ع_2^2$. وبافتراض أن حجم العينتين كان كبيراً ($ن_1 + ن_2 \geq 60$) فإننا نستخدم المختبر الإحصائي :

$$ى = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

وهو أيضاً متغير عشوائي يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي ويجري الاختبار كما سبق في (أ) .

(جـ) إذا كانت σ_1^2 ، σ_2^2 مجهولتين وحجم العينتين صغيراً :

إذا كان حجم العينتين صغيراً فإن المختبر الإحصائي يعتمد على ما إذا كان فرضنا بأن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(١) بافتراض أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (القيمتان المجهولتان متساويتان) .

في هذه الحالة نحسب التباين التجميعي من العلاقة :

$$ع^2 = \frac{(ن_1 - 1)ع_1^2 + (ن_2 - 1)ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - 2}$$

$$\text{حيث } ع_1^2 = \frac{1}{ن_1 - 1} \left\{ \text{مجـ}\, س_1^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س_1)^2}{ن_1} \right\}،$$

$$ع_2^2 = \frac{1}{ن_2 - 1} \left\{ \text{مجـ}\, س_2^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س_2)^2}{ن_2} \right\}$$

هما تقديراتنا لتباين المجتمعين كما سبق . والمختبر الاحصائي هو :

$$ت = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{ع^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2} \right)}}$$

والمتغير العشوائي (ت) يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية ($ن_1 + ن_2 - 2$) بافتراض صحة الفرض العدمي ($\mu_1 = \mu_2$) ونستخدم نفس الطرق السابقة في التحليل ولكن باستخدام توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعي المعياري .

(٢) بافتراض أن $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (القيمتان المجهولتان غير متساويتين) :

المختبر الإحصائي في هذه الحالة هو :

$$ت = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيعاً يقترب من توزيع (ت) بدرجة حرية (ن) بافتراض صحة الفرض العدمي حيث :

$$ن = \frac{\left[\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2} \right]^2}{\frac{(ع_1^2)^2}{ن_1^2 (ن_1 + 1)} + \frac{(ع_2^2)^2}{ن_2^2 (ن_2 + 1)}} - 2$$

وقيمة (ن) المحسوبة تكون في العادة عدداً حقيقياً لذلك نأخذ أقرب رقم صحيح لها ليكون درجة الحرية للتوزيع (ت) ثم نستخدم نفس الطرق السابقة في التحليل .

ملاحظة هامة :

في جميع اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالقيمة المتوقعة لمجتمعين مستقلين افترضنا لسهولة العرض أن الفرض العدمي هو ($\mu_1 = \mu_2$) بمعنى أن ($\mu_1 - \mu_2$ = صفر) . ولكن يمكن تعميم الأسلوب السابق في التحليل إذا كان الفرض العدمي مثلاً في الصورة $\mu_1 - \mu_2 =$ ك (حيث ك مقدار ثابت) وفي هذه الحالة يصبح المختبر الإحصائي (في حالة ما إذا كان تباين المجتمعين معلوماً على سبيل المثال) هو :

$$ى = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - ك}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أيضاً ومن ثم نستخدم نفس الأسلوب السابق في التحليل وبصورة عامة فإننا افترضنا أن ك = صفراً في جميع الحالات السابقة ، وهي الحالة الأكثر شيوعاً في كثير من التطبيقات .

مثال (١١ ــ ٨) :

للمقارنة بين نوعين من أنواع حليب الأطفال اخترنا عينتين من الأطفال الرضع حجم الأولى منهما ٣٥ طفلاً وحجم الثانية ٥٦ طفلاً واستخدم النوع الأول من الحليب في تغذية العينة الأولى لمدة ٤ شهور واستخدم النوع الثاني في تغذية العينة الثانية لنفس المدة الزمنية . فإذا وجد أن متوسط الزيادة في وزن أطفال المجموعة الأولى ٢,٥٦٠ كيلو جرام بينما متوسط

الزيادة في وزن أطفال المجموعة الثانية هو ٢,٧٩٥ كيلوجرام . فإذا علمت أن مقدار الزيادة يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين مقداره ٠,٨٥٠ للنوع الأول و٠,٦٧٨ للنوع الثاني . اختبر الفرض القائل بأنه ليس هناك فرق بين النوعين عند مستوى معنوية ٠,٠١ .

الحـل : $ن_1 = ٣٥$ ، $\overline{س}_1 = ٢,٥٦٠$ ، $\sigma_1^2 = ٠,٨٥٠$

$ن_2 = ٥٦$ ، $\overline{س}_2 = ٢,٧٩٥$ ، $\sigma_2^2 = ٠,٦٧٨$

الفرض العدمي : $\mu_1 = \mu_2$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2$ (اختبار الطرفين)

المختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{\overline{س}_1 - \overline{س}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بافتراض صحة الفرض العدمي

$$= \frac{٢,٥٦٠ - ٢,٧٩٥}{\sqrt{\frac{٠,٨٥٠}{٣٥} + \frac{٠,٦٧٨}{٥٦}}}$$

$$= \frac{-٠,٢٣٥}{\sqrt{٠,٠٢٤٣ + ٠,٠١٢١}}$$

$$= -١,٢٣٢$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن قيمة (ى) التي تجعل مساحة منطقة الرفض (بطرفيها المتساويين) تساوي ٠١,٠ هي ٢,٥٧ .

وحيث أن قيمة (ى) المحسوبة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه لا يوجد فرق بين النوعين من الحليب على زيادة وزن الأطفال بدرجة ثقة ٩٩٪ .

مثال (١١ ـ ٩) :

أخذت عينتان من قاطني الشقق السكنية في دولتين مختلفتين لقياس مستوى أسعار إيجارات السكن وكانت النتائج كالتالي :

$ن_١ = ١٢٠$ ، $\overline{س}_١ = ٣٧٩,٢٠$ ، $ع_١ = ٥٤$ دولار

$ن_٢ = ١٩٥$ ، $\overline{س}_٢ = ٣٢١,٤٣$ ، $ع_٢ = ٦٢$ دولار

فهل تدل هذه البيانات على أن هناك فرقاً حقيقياً بين مستوى الإيجار في البلدين عند مستوى معنوية ٠٥, .

الحــل :

بافتراض أن ($\mu_١$) هي متوسط الإيجار في البلد الأول، ($\mu_٢$) هي متوسط الإيجار في البلد الثاني .

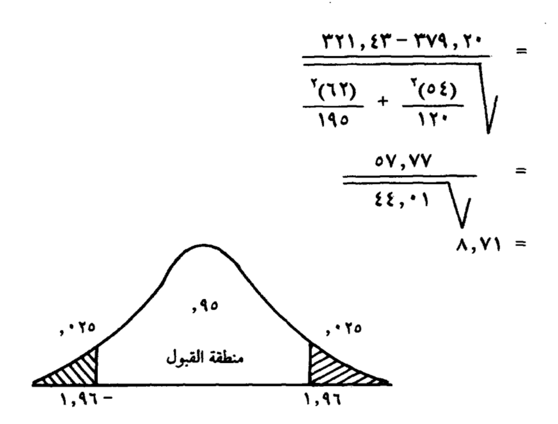
الفرض العدمي : $\mu_١ = \mu_٢$

الفرض البديل : $\mu_١ \neq \mu_٢$ (اختبار الطرفين)

وحيث إن حجم العينتين كبيراً فإن المختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض قيمة الفرض العدمي .



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن قيمة (ى) التي تحقق مستوى المعنوية ٠٥, في اختبار الطرفين هي ١,٩٦ .

وحيث أن قيمة (ى) المحسوبة أكبر من قيمة (ى) الجدولية أي تقع في منطقة الرفض ومن ثم نقبل الفرض البديل القائل بأن مستوى الايجار مختلف بين البلدين بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ ــ ١٠) :

في دراسة لقياس مستوى الذكاء بين طلاب جامعتي القاهرة والكويت أخذت عينة عشوائية حجمها ١٤ من طلبة جامعة الكويت فكان متوسط الذكاء ١١٠ والانحراف المعياري ٨ . وأخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ من بين طلبة جامعة القاهرة فكان متوسط الذكاء ١٠٥ والانحراف المعياري ١٠ .

اختبر عند مستوى معنوية ٠٥, ما إذا كان هناك فرق بين مستوى الذكاء بين طلبتي الجامعتين إذا علمت أن تباين المجتمعين متساويان .

الحـل : $ن_١ = ١٤$ ، $\overline{س}_١ = ١١٠$ ، $ع_١ = ٨$

$ن_٢ = ١٦$ ، $\overline{س}_٢ = ١٠٥$ ، $ع_٢ = ١٠$

وبافتراض أن $\mu_١$ هي مستوى الذكاء في جامعة الكويت

$\mu_٢$ هي مستوى الذكاء في جامعة القاهرة .

الفرض العدمي : $\mu_١ = \mu_٢$ (تساوي مستوى الذكاء)

الفرض البديل : $\mu_١ \neq \mu_٢$ (اختبار الطرفين)

وحيث أن حجم العينتين صغير فإن المختبر الإحصائي هو :

$$ت = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{ع^٢ \left(\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}\right)}}$$

يتبع التوزيع (ت) بدرجات حرية ($ن_١ + ن_٢ - ٢$) بافتراض صحة الفرض العدمي .

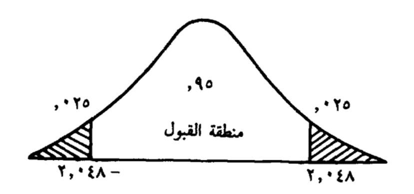
وحيث إن تباين المجتمعين متساويان فإنه يمكن تقدير التباين التجميعي من العلاقة .

$$ع^٢ = \frac{(ن_١ - ١)ع_١^٢ + (ن_٢ - ١)ع_٢^٢}{ن_١ + ن_٢ - ٢}$$

$$= \frac{١٣ \times ٦٤ + ١٥ \times ١٠٠}{٢٨} = ٨٣,٢٨٦$$

$$\therefore ت = \frac{١١٠ - ١٠٥}{\sqrt{٨٣,٢٨٦\left(\frac{١}{١٤} + \frac{١}{١٦}\right)}}$$

$$= \frac{٥}{٣,٣٣٩٨} = ١,٤٩٧$$



وباستخدام توزيع (ت) عند مستوى المعنوية ٠٥, ودرجات حرية ٢٨ فإن منطقة القبول هي (- ٢,٠٤٨ ، ٢,٠٤٨) .

وحيث إن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول أي أننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه ليس هناك فرق جوهري بين مستوى الذكاء بين طلبتي الجامعتين بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ ـ ١١) :

من بيانات المثال السابق اختبر ما إذا كان هناك فرق بين مستوى الذكاء بين طلبتي الجامعتين إذا علمت أن تباين المجتمعين غير متساويين .

الحـــل :

في هذه الحالة فإن المختبر الإحصائي هو :

$$ت = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}} = \frac{١١٠ - ١٠٥}{\sqrt{\frac{٦٤}{١٤} + \frac{١٠٠}{١٦}}}$$

$$= \frac{٥}{٣,٢٨٩} = ١,٥٢$$

والمختبر الإحصائي هو متغير يقترب من التوزيع (ت) بدرجات حرية (ن) حيث :

$$ن = \frac{\left(\frac{٦٤}{١٤} + \frac{١٠٠}{١٦}\right)^٢}{\frac{(٦٤)^٢}{٩٦ \times ١٥} + \frac{(١٠٠)^٢}{٢٥٦ \times ١٧}} - ٢$$

$$= \frac{١١٧,١٠٣٣}{٣,٦٩} - ٢ = ٣١,٧٣ - ٢ = ٢٩,٧٣$$

∴ ن = ٣٠ إلى أقرب رقم صحيح .

وباستخدام توزيع (ت) عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٣٠ نجد أن منطقة القبول هي (- ٢,٠٤ ، ٢,٠٤) .

وحيث إن القيمة المحسوبة (١,٥٢) تقع داخل منطقة القبول ومن ثم فليس هناك فرق جوهري بين مستوى الذكاء في المجتمعين بدرجة ثقة ٩٥٪ .

(٣) اختبارات الفروض الإحصائية لنسبة ظاهرة ما في المجتمع :

سبق أن أشرنا إلى نسبة المفردات التي تحمل صيغة معينة في مجتمع ما بالنسبة (ح) وأن (خ) هي التقدير الجيّد للنسبة (ح) باستخدام بيانات عيّنة عشوائية من المجتمع موضع الدراسة . أيضاً سبق أن ذكرنا أن المتغير العشوائي (خ) يتبع توزيعاً احتمالياً متقطعاً يعرف بتوزيع ذو الحدين Binomial Distribution . وإذا كان حجم العينة (ن) كبيراً فإنه يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي بتوقع (ح) وتباين $\frac{ح(١-ح)}{ن}$ ومن ثم يمكن استخدام المختبر الإحصائي .

$$ى = \frac{\hat{خ} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١-ح)}{ن}}}$$

وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ومن ثم يمكن استخدامه في اختبار الفروض الإحصائية حول نسبة الحدوث في المجتمع كما سبق .

مثال (١١ ـ ١٢) :

إذا كانت نسبة الافراد الذين يقل أعمارهم عن ٢٥ سنة في إحدى المدن هي ٣٠٪ وأخذت عيّنة من ٢٠٠ فرد من هذه المدينة فوجد أن بينهم ٦٨ فرداً أعمارهم تقل عن ٢٥ سنة ، فهل تستنتج أن هذه العيّنة لا تمثل المدينة من حيث تمثيل فئة العمر الأقل من ٢٥ سنة وذلك عند مستوى المعنوية ٠٥, .

الحـــل :

$$ن = ٢٠٠ \quad ، \quad ح = ٠,٣٠ \quad ، \quad \hat{ح} = \frac{٦٨}{٢٠٠} = ٠,٣٤$$

الفرض العدمي : ح = ٣, (العينة تمثل المدينة)

الفرض البديل : ح ≠ ٣, (اختبار الطرفين)

والمختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{\hat{ح} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}}$$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

$$= \frac{٠,٣٤ - ٠,٣٠}{\sqrt{\frac{٠,٣ \times ٠,٧}{٢٠٠}}}$$

$$= \frac{٠,٠٤}{٠,٣٢} = ١,٢٣$$

وعند مستوى المعنوية ٠٥, وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما سبق نجد أن منطقة القبول هي (- ١,٩٦ ، ١,٩٦) .

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه ليس هناك فرق جوهري بين النسبة في العينة والنسبة في المجتمع بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ ـ ١٣) :

ادعت نقابة عمالية بأن ٤٠٪ على الأقل من مهندسي السكك الحديدية استبدلت مهنتها المعينة فيها بمهنة أخرى خلال أربع السنوات الأخيرة . ولدراسة هذا الادعاء أخذت عينة من ١٢٨ مفردة أظهرت أن ٣٢ مهندساً استبدلوا مهنتهم خلال أربع السنوات الأخيرة . اختبر هذا الادعاء عند مستوى المعنوية ٠١, .

الحـــل :

$$ح = ٤٠, \quad ، \quad ن = ١٢٨ \quad ، \quad \hat{ح} = \frac{٣٢}{١٢٨} = ٢٥,$$

الفرض العدمي : ح = ٤٠,

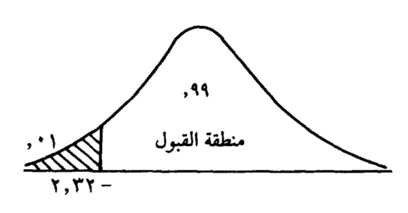
الفرض البديل : ح < ٤٠, (اختبار الطرف الأيسر)

والمختبر الإحصائي هو :

$$ى = \frac{\hat{ح} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}} \quad \text{يتبع التوزيع الطبيعي المعياري}$$

$$= \frac{٢٥, - ٤٠,}{\sqrt{\frac{٤, \times ٦,}{١٢٨}}} = \frac{- ١٥,}{٠٤٣٣,}$$

$$= - ٣,٤٦٤$$



وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية ,٠١ نجد أن قيمة (ى) التي تحقق اختبار الطرف الأيسر هي (- ٢,٣٢) وحيث إن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية (تقع في منطقة الرفض) فإننا نرفض الادعاء القائل بأن ٤٠٪ من مهندسي السكك الحديدية استبدلوا مهنتهم خلال أربع السنوات الأخيرة بدرجة ثقة ٩٩٪ .

(٤) اختبارات الفروض لتساوي نسبة الحدوث لمجتمعين مختلفين :

إذا أردنا مقارنة نسبة الحدوث لمجتمعين مختلفين ($ح_١$ ، $ح_٢$) وسحبنا عينتين عشوائيتين من المجتمعين وحصلنا على النتائج التالية :

	العينة الأولى	العينة الثانية
حجم العينة	$ن_١$	$ن_٢$
نسبة الحدوث	$\hat{خ}_١$	$\hat{خ}_٢$
التبايـن	$\frac{\hat{خ}_١(١-\hat{خ}_١)}{ن_١}$	$\frac{\hat{خ}_٢(١-\hat{خ}_٢)}{ن_٢}$

وبافتراض صحة الفرض العدمي والقائل بأنه لا يوجد فرق بين نسبتي حدوث الظاهرة في المجتمعين ($ح_١ = ح_٢ = ح$) فإن الفرق بين تقديري نسبة الحدوث يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري بتوقع ($ح_١ - ح_٢$) = صفر وتباين يمكن تقديره من العلاقة :

تباين ($\hat{خ}_1 - \hat{خ}_2$) = تباين $ح_1$ + تباين $ح_2$:

$$= \frac{ح_1 (1 - ح_1)}{ن_1} + \frac{ح_2 (1 - ح_2)}{ن_2}$$

$$= ح (1 - ح) \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2} \right)$$

وذلك بفرض صحة الفرض العدمي ($ح_1 = ح_2 = ح$) .

وحيث إن (ح) غير معلومة فيمكن تقديرها باستخدام بيانات العينتين على النحو التالي :

$$\hat{خ} = \frac{ن_1 \hat{خ}_1 + ن_2 \hat{خ}_2}{ن_1 + ن_2}$$

وبالتالي فإن :

$$\text{تباين} (\hat{خ}_1 - \hat{خ}_2) = \frac{\hat{خ} (1 - \hat{خ}) (ن_1 + ن_2)}{ن_1 \, ن_2}$$

والمختبر الاحصائي في هذه الحالة :

$$ى = \frac{\hat{خ}_1 - \hat{خ}_2}{\sqrt{\frac{\hat{خ} (1 - \hat{خ}) (ن_1 + ن_2)}{ن_1 \, ن_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بفرض صحة الفرض العدمي ثم نستخدم الطرق السابقة باستخدام هذا المختبر في اختبارات الفروض المتعلقة بالفرق بين نسبتين .

مثال (١١ ــ ١٤) :

أجرى استفتاء على موضوع ما في مجتمعين فأخذت عينة عشوائية من المجتمع الأول فكان عدد الذين وافقوا على ذلك الموضوع هو ٢٤٣ من بين ٣٠٠ شخص ، وفي عيّنة عشوائية أخرى سحبت من المجتمع الثاني

وجد أن عدد الذين وافقوا على ذلك الموضوع هو ١٦٤ من بين ٢٠٠ شخص . فهل يدل ذلك على وجود فرق جوهري بين درجة قبول ذلك الموضوع في المجتمعين عند مستوى المعنوية ٠٥, .

الحل :

$$ن_١ = ٣٠٠ \quad ، \quad ثَ_١ = \frac{٢٤٣}{٣٠٠} = ٨١,$$

$$ن_٢ = ٢٠٠ \quad ، \quad ثَ_٢ = \frac{١٦٤}{٢٠٠} = ٨٢,$$

$$ثَ = \frac{ن_١ ثَ_١ + ن_٢ ثَ_٢}{ن_١ + ن_٢} = \frac{٣٠٠ \times ٨١, + ٢٠٠ \times ٨٢,}{٢٠٠ + ٣٠٠}$$

$$= \frac{٢٤٣ + ١٦٤}{٥٠٠} = \frac{٤٠٧}{٥٠٠} = ٨١٤,$$

بافتراض أن ($ح_١$ ، $ح_٢$) هي نسب الموافقين على الموضوع في المجتمعين على الترتيب .

الفرض العدمي : $ح_١ = ح_٢$

الفرض البديل : $ح_١ \neq ح_٢$ (اختبار الطرفين)

وبافتراض صحة الفرض العدمي فإن المختبر الإحصائي :

$$ى = \frac{ثَ_١ - ثَ_٢}{\sqrt{\frac{ثَ\ (١ - ثَ)\ (ن_١ + ن_٢)}{ن_١\ ن_٢}}}$$

يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري .

$$= \frac{٨١, - ٨٢,}{\sqrt{\frac{٨١٤, \times ١٨٦, \times ٥٠٠}{٦٠٠٠٠}}} = - ٢٨,$$

وعند مستوى المعنوية ٠٫٠٥ وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما سبق نجد أن منطقة القبول هي (- ١٫٩٦ ، ١٫٩٦) . وحيث إن القيمة المحسوبة تقع داخل منطقة القبول فليس هناك ما يبرر رفض الفرض العدمي ، أي أنه لا يوجد فرق بين درجة قبول ذلك الموضوع في المجتمعين عند مستوى المعنوية ٠٫٠٥ .

(٥) اختبارات الفروض الاحصائية لتباين المجتمع :

لاختبار الفروض الإحصائية المتعلقة بتباين مجتمع دراسة (σ^2) على أساس القيمة المقدرة لهذا التباين والمحسوبة من عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع باستخدام العلاقة :

$$ع^2 = \frac{1}{ن - 1}\left\{ مجـ\ س^2 - \frac{(مجـ\ س)^2}{ن} \right\}$$

يستخدم المختبر الإحصائي :

$$كا^2 = \frac{(ن - 1)\ ع^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{مجـ\ س^2 - \frac{(مجـ\ س)^2}{ن}}{\sigma^2}$$

وهو متغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي Chi-Square بدرجات حرية (ن - ١) وذلك إذا كان المتغير (س) موزعاً توزيعاً طبيعياً ، ويقترب من توزيع مربع كاي إذا كانت (س) موزعة غير ذلك بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً . ثم نستخدم نفس الخطوات السابقة لاختبار الفروض المتعلقة بتباين المجتمع مع ملاحظة أن توزيع مربع كاي غير متماثل لذلك فإن ما ينطبق على الجهة اليمنى لا ينطبق على الجهة اليسرى وكذلك عند استخدام

اختبار الطرفين نقسم منطقة الرفض إلى قسمين متساويين في المساحة (كل جزء يساوي مستوى المعنوية مقسوماً على ٢) غير أن حدود كل منطقة يحدد من الجدول كل على حدة .

مثال (١١ ــ ١٥) :

في عينة من ٢٥ مفردة كان الانحراف المعياري ٥,١ وبفرض أن المجتمع موزع توزيعاً طبيعياً اختبر الفرض القائل بأن الانحراف المعياري للمجتمع هو ٧ ضد الفرض القائل بأنه أكبر من ذلك عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ .

الحـــل :

ن = ٢٥ ، ع = ٥,١ ، σ = ٧

الفرض العدمي : σ^2 = ٤٩

الفرض البديل : σ^2 > ٤٩ (اختبار الطرف الأيمن)

المختبر الاحصائي هو :

$$\text{كا}^2 = \frac{(\text{ن} - 1)\,\text{ع}^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{24 \times (5{,}1)^2}{49}$$

$$= \frac{24 \times 26{,}01}{49}$$

$$= 12{,}7396$$



وعند مستوى المعنوية ٠,٠٥ ، وباستخدام جدول توزيع مربع كاي بدرجات حرية ٢٤ نجد أن منطقة الرفض تبدأ من ٣٦,٤٢ . وحيث إن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأن تباين المجتمع يساوي ٤٩ (الانحراف المعياري يساوي ٧) بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١ ــ ١٦) :

استخدم بيانات المثال السابق في اختبار الفرض القائل بأن تباين المجتمع هو ٤٩ ضد الفرض القائل بأنه لا يساوي ٤٩ عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

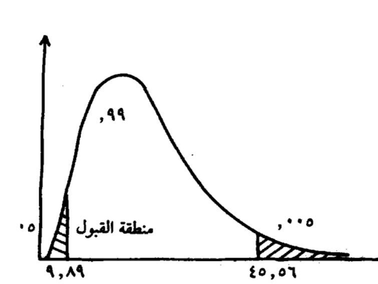
الحـــل :

الفرض العدمي : $\sigma^2 = ٤٩$

الفرض البديل : $\sigma^2 \neq ٤٩$ (اختبار الطرفين)

والمختبر الاحصائي هو كا^2 = ١٢,٧٣٩٦

ولتحديد منطقة الرفض في هذه الحالة نجد أن لدينا منطقتين حجم كل منهما يساوي ٠,٠٠٥ ، وللكشف عن حدود منطقة الرفض يجب الكشف عن حدود كل منطقة على حدة باستخدام جدول توزيع كا^2 بدرجة



حرية ٢٤، حيث نجد أن حدود المنطقة التي على اليمين المقابلة للمساحة ٠,٠٠٥ هي ٤٥,٥٦ ، بينما نجد أن حدود المنطقة التي على اليسار والمقابلة للمساحة ٠,٩٩٥ هي ٩,٨٩ .

وحيث إن القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول لذلك فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأن القيمة الحقيقية لتباين المجتمع هي ٤٩ بدرجة ثقة ٩٩٪ .

(٦) اختبارات الفروض المتعلقة بتباين مجتمعين مختلفين :

لإجراء اختبار عمّا إذا كان هناك فرق جوهري بين تباين مجتمعين مختلفين σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب ، نقوم بسحب عينتين الأولى حجمها ($ن_1$) من المجتمع الأول والثانية حجمها ($ن_2$) من المجتمع الثاني ثم نقدر تباين المجتمعين ($ع_1^2$ ، $ع_2^2$) على الترتيب باستخدام بيانات العينتين كما سبق .

والمختبر الإحصائي المستخدم هو :

$$ف = \frac{ع_1^2}{ع_2^2} \qquad (ع_1^2 > ع_2^2)$$

يتبع توزيع (ف) بدرجات حرية ($ن_1 - ١$) ، ($ن_2 - ١$) عند مستوى المعنوية المحدد ويطلق عليه اسم اختبار التجانس . ونظراً لطبيعة جدول توزيع (ف) يجري هذا الاختبار على النحو التالي : ـ

١ ـ إذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية نقبل الفرض العدمي .

٢ ـ إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية نرفض الفرض العدمي .

مـلاحظـة :

إذا كان $ع_2^2 > ع_1^2$ نستخدم المختبر الاحصائي

$$ف = \frac{ع_2^2}{ع_1^2}$$

وهو يتبع توزيع (ف) بدرجات حرية ($ن_2 - 1$) ، ($ن_1 - 1$) .

مثال (١١ ــ ١٧) :

بافتراض أن لدينا عينتين عشـوائيتين الأولى حجمها ٩ مفـردات وتباينهـا ٢٤ والثـانية حجمهـا ١٥ مفردة وتبـاينها ١١ . اختبـر الفرض القـائل بتسـاوي تباين المجتمعين اللذين سحبت منهما العينتان عند مستوى المعنوية ٠٥, .

الحـــل :

$ن_1 = ٩$ ، $ع_1^2 = ٢٤$

$ن_2 = ١٥$ ، $ع_2^2 = ١١$

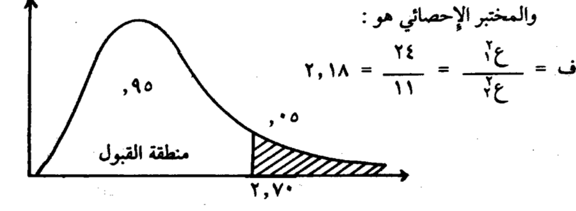
ويفــرض أن σ_1^2 ، σ_2^2 تشيـران إلى تبــاين المجتمعين الأول والثــاني على الترتيب .

الفرض العدمي : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (هناك تجانس بين المجتمعين)

الفرض البديل : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (لا يوجد تجانس بين المجتمعين)

والمختبر الإحصائي هو :

$$ف = \frac{ع_1^2}{ع_2^2} = \frac{٢٤}{١١} = ٢,١٨$$



وباستخدام جدول (ف) عند مستوى المعنوية ٠٥, ودرجات الحرية ٨ ، ١٤ نجد أن ف (٨ ، ١٤ ، ٠٥,) = ٢,٧٠ وحيث ان القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية (تقع في منطقة القبول) لذلك فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بتساوي تباين المجتمعين (هناك تجانس بين المجتمعين) بدرجة ثقة ٩٥٪ .

تمارين محلولة

١ ـ فيما يلي بيان بتوزيع ١٠٠ طالب حسب الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان مادة الإحصاء .

فئات الدرجات	صفر -	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨- ٢٠
عدد الطلبة	٢٠	٢٥	٣٠	١٨	٧

احسب نسبة الحاصلين على ١٤ درجة فأكثر ثم قدر هذه النسبة لمجتمع الطلبة بثقة ٩٩٪ .

الحـــل :

$$\text{نسبة الطلبة الحاصلين على ١٤ فأكثر} = ح = \frac{٢٥}{١٠٠} = ,٢٥$$

وبثقة ٩٩٪ وباستخدام هذه النسبة فيمكننا تقدير هذه النسبة للمجتمع ككل باستخدام العلاقة :

$$ح \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}$$

$$,٢٥ \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{,٢٥ \times ,٧٥}{١٠٠}}$$

$$,٢٥ \pm ,١١$$

∴ نسبة الحاصلين على ١٤ درجة فأكثر لكل الطلبة تتراوح بين (١٤, ، ٣٦,) بثقة ٩٩٪ .

٢ ـ البيانات التالية تعطي متوسط انتاجية العامل والانحراف المعياري في عينتين حجم كل منها ٥٠ مفردة من العمال الذكور ومن العاملات الإناث وذلك في دراسة لإحدىٰ عمليات الإنتاج .

عينة الذكور	عينة الانـاث
$\bar{س}_1$ = ٨٥	$\bar{س}_2$ = ٩٦
$ع_1$ =٦	$ع_2$ =٨
$ن_1$ = ٥٠	$ن_2$ = ٥٠

هل ترى من نتائج هذه الدراسة وجود فرق معنوي بين إنتاجية العامل وإنتاجية العاملة في هذه العملية الإنتاجية ؟

الحـــل :

بافتراض أن (μ_1 ، μ_2) هي متوسط الانتاجية في مجتمع العمال والعاملات على الترتيب :

الفرض العدمي : $\mu_1 = \mu_2$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2$ (اختبار الطرفين)

وحيث إن حجم العينتين كبير فإن المتغير العشوائي :

$$ى = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي .

$$ى = \frac{٨٥ - ٩٦}{\sqrt{\frac{٣٦}{٥٠} + \frac{٦٤}{٥٠}}} = \frac{-١١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١١}{١,٤١٤}$$

∴ ى = - ٧,٧٧٩

وعند مستوى المعنوية ٠٥, نعلم أن منطقة القبول هي (-١,٩٦ ، ١,٩٦) وعليه فإن القيمة المحسوبة تقع في منطقة الرفض .

وبعبارة أخرى فإنه يوجد فرق جوهري بين إنتاجية العامل وإنتاجية العاملة في هذه العملية الانتاجية .

٣ ـ أجريت استبانة إحصائية على مجموعة من النساء والرجال فكان عدد المتعاونين المستجيبين للاستبانة من الفئتين على النحو التالي :

	حجم العينة	عدد المتعاونين مع الاستبيان
رجـال	٢٠٠	١١٠
نسـاء	٣٠٠	٢١٠

اختبر الفرض الإحصائي بأن معدل الاستجابة واحد للجنسين عند مستوى المعنوية ٠٥, .

الحـل :

نسبة المستجيبين من الرجال = $ث_١ = \frac{١١٠}{٢٠٠} = ٫٥٥$

نسبة المستجيبين من النساء = $ث_٢ = \frac{٢١٠}{٣٠٠} = ٫٧٠$

وبفرض أن $ح_١$ ، $ح_٢$ هي نسب المستجيبين في مجتمع الرجال والنساء على الترتيب .

الفرض العدمي : $ح_1 = ح_2$

الفرض البديل : $ح_1 \neq ح_2$ (اختبار الطرفين)

المختبر الاحصائي هو :

$$ى = \frac{\hat{خ}_1 - \hat{خ}_2}{\sqrt{\frac{ح (1 - ح) (ن_1 + ن_2)}{ن_1 \; ن_2}}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بافتراض صحة الفرض العدمي حيث :

$$ح = \frac{ن_1 \hat{خ}_1 + ن_2 \hat{خ}_2}{ن_1 + ن_2}$$

$$= \frac{٢٠٠ \times ,٥٥ + ٣٠٠ \times ,٧٠}{٢٠٠ + ٣٠٠} = \frac{١١٠ + ٢١٠}{٥٠٠} = ,٦٤$$

لذلك فإن :

$$ى = \frac{,٥٥ - ,٧٠}{\sqrt{\frac{,٦٤ \times ,٣٦ \times ٥٠٠}{٦٠٠٠٠}}} = \frac{- ,١٥}{,٠٤٣٨} = - ٣,٤٢$$

وعند مستوى المعنوية ,٠٥ نجد أن منطقة القبول هي (- ١,٩٦ ، ١,٩٦) . وحيث إن القيمة المحسوبة لا تقع في منطقة القبول لذلك فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بأن نسبة الاستجابة للاستبانة متساوية بين الرجال والنساء بدرجة ثقة ٩٥٪ .

٤ ـ مصنع ما لمواد كيمائية ينتج نوعاً من المركبات الكيمائية بمتوسط ٨٨٠ طن يومياً وانحراف معياري ٢١ طن يومياً . لاختبار مدى تحقيق هذا المصنع للإنتاجية المطلوبة أخذت عيّنة من إنتاج ٥٠ يوماً فكان

متوسطها ٨٧١ طن في اليوم الواحد . اختبر ما إذا كان المصنع يحقق الهدف المرسوم له إنتاجياً عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

الحـــل :

ن = ٥٠ ، $\bar{س}$ = ٨٧١ ، μ = ٨٨٠ ، σ = ٢١

الفرض العدمي : μ = ٨٨٠

الفرض البديل : $\mu \neq$ ٨٨٠ (اختبار الطرفين)

والمختبر الاحصائي هو :

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma \div \sqrt{ن}}$$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

$$= \frac{٨٧١ - ٨٨٠}{٢١ \div \sqrt{٥٠}} = \frac{- ٩}{٢,٩٧} = - ٣,٠٣$$

وعند مستوى المعنوية ٠,٠١ نجد أن منطقة القبول هي (- ٢,٥٧ ، ٢,٥٧) . وحيث أن القيمة المحسوبة لا تقع في حدود منطقة القبول فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بأن متوسط الإنتاج اليومي يعادل ٨٨٠ طن بدرجة ثقة ٩٩٪ .

٥ ـــ أراد أحد المصانع أن يختبر طريقة أخرى لتدريب عماله ، فإذا أخذت عينتان من العمال المتدربين على الطريقة القديمة (الطريقة رقم ١) والعمال المتدربين على الطريقة الجديدة (الطريقة رقم ٢) فإذا كانت $ن_١$ = ٩ ، $ن_٢$ = ١٥ وإذا كان متوسط الوقت الذي يأخذه العامل المتدرب على الطريقة الأولى هو ٣٥,٢٢ دقيقة لتركيب جهاز معيّن ، ومتوسط الوقت للعامل من المجموعة الثانية لتركيب نفس الجهاز هو ٣٧,٥٦ دقيقة ، وكانت $ع_١^٢$ = ٢٤,٤٤٥ ، $ع_٢^٢$ = ١١,٤٤٤ . اختبر

ما إذا كانت الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة عند مستوى المعنوية ٠,٠٥ , إذا علمت أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

الحـــل :

$ن_1 = ٩$ ، $\bar{س}_1 = ٣٥,٢٢$ ، $ع_1^2 = ٢٤,٤٤٥$

$ن_2 = ١٥$ ، $\bar{س}_2 = ٣٧,٥٦$ ، $ع_2^2 = ١١,٤٤٤$

وحيث أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

لذلك فإن σ^2 تقدر باستخدام العلاقة :

$$ع^2 = \frac{(ن_1 - ١) ع_1^2 + (ن_2 - ١) ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - ٢}$$

$$= \frac{٨ \times ٢٤,٤٤٥ + ١٤ \times ١١,٤٤٤}{٩ + ١٥ - ٢}$$

$$= \frac{٣٥٥,٧٧٦}{٢٢} = ١٦,١٧$$

الفرض العدمي : $\mu_1 = \mu_2$

الفرض البديل : $\mu_1 < \mu_2$ (اختبار الطرف الأيسر)

المختبر الإحصائي هو :

$$ت = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{ع^2 \left(\frac{١}{ن_1} + \frac{١}{ن_2}\right)}}$$

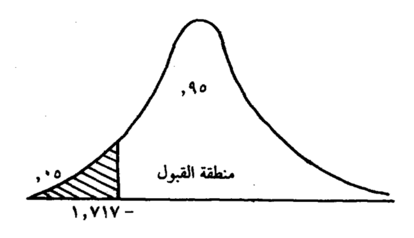
يتبع توزيع (ت) بدرجات حرية ($ن_1 + ن_2 - ٢$) بافتراض صحة الفرض العدمي.

$$= \frac{٣٧,٥٦ - ٣٥,٢٢}{\sqrt{١٦,١٧ (\frac{١}{٩} + \frac{١}{١٥})}}$$

$$= \frac{- ٢,٣٤}{١,٦٩٥} = - ١,٣٨$$

وعند مستوى المعنوية ٠٥, وباستخدام جدول توزيع (ت) بدرجات حرية ٢٢ نجد أن الحد الأعلى لمنطقة الرفض = -١,٧١٧ .

وحيث أن القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض العدمي القائل بأنه لا يوجد فرق بين الأسلوبين بدرجة ثقة ٩٥٪ .



تمارين الفصل الحادي عشر

(١) إذا كان متوسط سعر الصرف بين الدينار الكويتي والدولار الأمريكي هو ٠,٢٩٣٥ فلساً لكل دولار وبانحراف معياري قدره ٠٥٩, وللتأكد من ذلك أخذت عينة لسعر الصرف من ٤٥ مؤسسة مصرفية فكان متوسط السعر هو ٠,٢٩٣٩٩ فلساً . فهل يدل ذلك على اختلاف سعر الدولار عند مستوى المعنوية ٠,٠٥.

(٢) خلال النقاش على عقد جديد بين شركة مواد بناء وعمالها ادعى ممثل نقابة العمال بأن متوسط أجر العامل في اليوم في باقي الشركات أعلى منه في الشركة ويبلغ ٤,٥٠٠ دينار . وللتأكد من ذلك أخذت عينة من ٤٩ عاملاً من الشركات الأخرى فكان متوسط أجرها اليومي ٤,٦٥٠ دينار . اختبر هذا الادعاء عند مستوى المعنوية ٠١, إذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع هو ٥٦٠, .

(٣) في محاولة لاستطلاع رأي الجماهير في أحد مشروعات القوانين أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ فرد وافق منهم ٩٠ فرداً على المشروع وعارضه ١٠ أفراد فماذا نستنتج عن نسبة تقبل المجتمع الذي سحبت منه العينة ، وإذا كان عدد سكان المجتمع الذين لهم حق التصويت حول هذا القانون ٢٠٠٠٠ شخص فقدر عدد الموافقين على المشروع بثقة ٩٩٪ .

(٤) إذا كـان متوسط غلة محصـول معيّن هو ٧٥ كجم لكـل فدان واستخـدم نوع جديد من السماد في تجربة لـزراعته في ٢٠ قـطعة أرض فـوجد أن متـوسط الغلة هـو ٨٠ كجم لكـل فـدان بـانحـراف معيـاري ٦ ، هـل تستنتج من ذلك أن لنـوع السماد أثـراً على كمية الإنتـاج من المحصول عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ؟ .

(٥) سحبت عينتان مستقلتان من مجتمع ما وكانت نتائج الدراسة ما يلي :

العينة الأولى	العينة الثانية
$\bar{س}_1 = ٣٠$	$\bar{س}_2 = ٣٥$
$ع_1 = ٢$	$ع_2 = ٢,٥$
$ن_1 = ٤٠$	$ن_2 = ٦٠$

اختبـر الفرض الإحصـائي بعدم وجـود فرق جـوهـري بين المتـوسـطين بمستوى معنوية ٠,٠١ .

(٦) في عيِّنـة من ٤٠٠ شخص من سكان إحـدى الدول وجـد ١٥٠ شخصـاً في الفئـة العمريـة (أقل من ٢٠ سنـة) فهـل تـدل هـذه البيـانـات على صحة الفرض القائل بأن نسبة السكـان الذين يقـل عمرهـم عن ٢٠ سنـة في هذه الدولة = ٣٥, عند مستوى المعنوية ٠,٠١ .

(٧) وجـد أن متوسط الـدخل السنـوي للأسـرة في عينة حجمهـا ٩٠٠ أسـرة من منـطقة (أ) هـو ٢٤٠٠ دينار والانحـراف المعياري في هـذه العينـة ٢٠ ديناراً كما وجد أن متوسط الدخل السنوي للأسـرة في عينة حجمهـا ١٦٠٠ أسـرة من منـطقـة أخـرى (ب) هــو ٣٦٠٠ دينـار والانحــراف المعياري ٢٢ ديناراً فهل يعتبر الفـرق بين متوسـطي الدخـل في العينتين

يعكس اختلافاً جوهريا بين مستوى الدخل في المنطقتين عند مستوى المعنوية ۰٥, .

(٨) مسلسلة تلفزيونية يجب أن تثبت أنها تتمتع بمشاهدة ٢٥٪ من مشاهدي التلفزيون خلال أسابيع عرضها الـ ١٣ الأولى لكي تكون مسلسلة ناجحة . أخذت عينة من مشاهدي التلفزيون حجمها ٤٠٠ مشاهد ومشاهدة منها ٢٣٠ مشاهدة فوجد أن عدد المشاهدات لهذه المسلسلة هو ٦٥ ، وعدد المشاهدين ٤٣ . والمطلوب اختبار ما يلي :

أ ــ هل يمكن اعتبار المسلسل ناجحاً أم لا عند مستوى معنوية ۰٥, .

ب ــ هل أن نسبة المشاهدين من الرجال ومن النساء واحدة لهذا المسلسل عند مستوى معنوية ۰١, .

(٩) لاختبار ما إذا كان هناك فرق بين دخل الرجال والنساء لنفس الوظيفة في الإدارات العليا للشركات الخاصة أخذت عينتان من الرجال والنساء في نفس المستوى الوظيفي فكانت دخولهم الشهرية بالدينار كما يلي :

الرجال (المجموعة رقم ١)	النساء (المجموعة رقم ٢)
٧٥٠	٥٥٠
٦٩٥	٥٩٠
٨٩٥	٥٩٥
٦١٩	٧١٥
٧١٥	٦٣٥
٧٦٥	٦٩٥
٨١٠	
٦٩٥	
٧٦٩	
٧٦٠	

تحقق من ادعاء النقابات النسائية بمظلومية المرأة في الدخل لنفس الوظيفة عند مستوى المعنوية ٠١, إذا علمت أن :

أ ـ σ_1^2 = ١٥٠ ، σ_2^2 = ٩٠

ب ـ σ_1^2 ، σ_2^2 غير معلومين ولكنهما متساويان .

جـ ـ σ_1^2 ، σ_2^2 غير معلومين ولكنهما غير متساويين .

(١٠) أثبتت التجارب السابقة أن آلة ما تنتج سلعة معيّنة لها طول ٢٥ سم وللتأكد من أن الآلة لا زالت تنتج عند المستوى المقبول أخذت عينة من ٢٦ وحدة من إنتاج هذه الآلة فوجد أن طول هذه الوحدات في المتوسط هو ٢٥,٠٩ وانحرافها المعياري هو ٠,٠٤١ اختبر مدى صلاحية الآلة للإنتاج عند مستوى المعنوية ٠٥, .

(١١) سحبت عينة من إنتاج مصنع لإنتاج معلبات غذائية فكانت الأوزان الصافية للمواد المعلبة كما يلي :

١٧٤ ، ١٧٥ ، ١٧٠ ، ١٦٨ ، ١٦٥ ، ١٦٩

والمطلوب :

أ - تقدير متوسط الوزن الصافي للإنتاج في المصنع بدرجة ثقة ٩٥٪ .

ب - هل يمكن القبول بمستوى معنوية ٠١, أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع تباينه ١٠؟ .

جـ - هل يمكن أن نقول بمستوى معنوية ٠٥, أن هذه العينة مأخوذة من مجتمع انحرافه المعياري ٣ ضد الفرض القائل بأنه أقل من ذلك؟ .

الفصل الثاني عشر
استخدام البرامج الإحصائية الجاهزة
في تحليل البيانات

نظراً لصعوبة التعامل مع البيانات الإحصائية وحساب المقاييس المختلفة منها فعادة ما نلجأ إلى استخدام الحاسبات الآلية . وتتوفر حالياً العديد من البرامج الإحصائية التي تقوم بهذا الدور ، منها ما هو متوفر على الحاسبات الشخصية الصغيرة . من أهم هذه البرامج وأكثرها شهرة على المستوى العالمي : برنامج SAS الإحصائي وبرنامج SPSS وبرنامج BMDP والتي عرفت خلال استخداماتها على الحاسبات الكبيرة ويتوفر منها الآن نسخ معدة للاستخدام على الحاسبات الشخصية وهي المعروفة بالأسماء : SAS-PC ، + SPSS-PC ، BMDP-PC . كما أنه على مستوى الحاسبات الصغيرة «Micro-Computers» تتوفر العديد من البرامج الاحصائية المتكاملة ويصعب حصر هذه البرامج ومنها على سبيل المثال :

برنامج Microstat ، وبرنامج Statpro ، وبرنامج Statgraph ، وبرنامج Statplan ، وبرنامج Statpak ، والعديد من البرامج الاحصائية المشابهة .

وسوف نعرض في هذا الفصل اثنين من هذه البرامج : برنامج ميكروستات Microstat كمثال للبرامج الإحصائية المتكاملة التي يمكن استخدامها على الحاسبات الشخصية وبرنامج SPSS كمثال على البرامج المستخدمة على الحاسبات الكبيرة والصغيرة معاً ، مستخدمين بعض الأمثلة الواردة في الكتاب .

أولاً : استخدام برنامج ميكروستات في إدخال وتعديل وتحليل البيانات الإحصائية

١ ـ ادخال وتعديل البيانات :

برنامج Microstat(*) ميكروستات هو أحد البرامج الإحصائية الجيدة التي تعمل على الحاسبات الآلية الشخصية . يمتاز هذا البرنامج بسهولة استخدامه حيث إنه يعتمد في تشغيله على أوامر اختيارية من مجموعة من الأوامر التي تظهر على شاشة الجهاز Menus ولاختيار الأمر المناسب لتنفيذ العملية الإحصائية المطلوبة يختار المستخدم لهذا البرنامج العملية عن طريق الضغط على الحرف المقابل لهذه العملية على الشاشة التي تظهر مجموعة الأوامر المختلفة لينتقل بذلك إلى شاشة أخرى تحتوي على مجموعة من الاختيارات أو أسئلة أخرى وهكذا حتى يتم تحديد العملية تحديداً دقيقاً يقوم بعدها البرنامج بتنفيذ العملية المطلوبة . أي أن البرنامج يعتمد على أسلوب الحوار مع المستخدم من خلال طرح الأسئلة والاختيارات المختلفة وما على المستخدم سوى اختيار المناسب منها .

وأفضل أسلوب لتعلم استخدام هذا البرنامج هو أسلوب التعلم من خلال الممارسة لذا فإن هذا الفصل يعتمد على شرح البرنامج من خلال

(*) برنامج Microstat هو أحد البرامج المعدة من قبل شركة Ecosoft ويعمل على عدة أنواع من الحاسبات الشخصية . النسخة المستخدمة هنا هي النسخة رقم ٤,١ (Ver. 4.1) والمستخدمة على أجهزة IBM الشخصية .

عرض للنتائج والاختيارات التي يقدمها هـذا البرنـامج والاختيـار المستخدم والتي سوف يكتب بالخط العريض ويغلف بإطـار يميزه عن بـاقي أوامر ونتـائج البـرنامـج . للبدء في تشغيـل البرنـامج نضـع القرص Diskette الـذي يحتوي على البرنامـج في قارىء الأقـراص رقم (١) في الجهاز Disk Drive ثم نشغـل الحاسب الآلي ليعمل البرنامج تلقائياً إلى أن تظهر على الشـاشة قـائمة الاختيـارات الأسـاسيـة لهـذا البـرنـامج والمـوضحـة في الشكـل (١٢ ــ ١) وهي عبـارة عن اختيارات لطرق وأساليب تحليل احصـائية مختلفـة معرفـة بحرف من (A) إلى (P) نختار أياً منهـا بالضغط على الحـرف المقابـل لكل عمليـة . ولفهم معنى هذه العملية فإن الجدول التالي يترجم معاني واستخدامات هذه العملية :

تحليل السلاسل الزمنية	I	اختيـار إدخال البيـانات وعـرضها ومعـالجتهـا وخلق فايل خاص بها .	A
الطرق الإحصائية اللامعلمية	J	اختيـار لايجاد المقـاييس الإحصائيـة الـوصفيـة (الوسط الحسابي ، الانحـراف المعياري. . . . الخ) .	B
الجداول الثنائية واختبار كا^2	K	اختيار خلق جداول تكرارية لبيانات ملف يحتوي على قيم متغيرات مختلفة .	C
التباديل والتوافيق	L	اختبارات الفروض الإحصائية الخاص بالمتوسط الحسابي .	D
التوزيعات الاحصائية	M	تحليل التباين	E
اختبارات الفروض للنسب	N	رسم بيانات متغيرين	F
اختيار تغيير لون البرنامج والمعالم المؤثرة في تشغيله .	O	معامل الارتباط الخطي ومجاميع المربعات .	G
اختيار إنهاء البرنامج	P	الانحدار الخطي البسيط والمتعدد .	H

OPTIONS :

A. DATA MANAGEMENT SUBSYSTEM
B. DESCRIPTIVE STATISTICS
C. FREQUENCY DISTRIBUTIONS
D. HYPOTHESIS TESTS : MEAN
E. ANALYSIS OF VARIANCE
F. SCATTERPLOT
G. CORRELATION MATRIX
H. REGRESSION ANALYSIS
I . TIME SERIES ANALYSIS
J. NONPARAMETRIC STATISTICS
K. CROSSTAB/CHI-SQUARE TESTS
L. PERMUTATIONS/COMBINATIONS
M. PROBABILITY DISTRIBUTIONS
N. HYPOTHESIS TESTS: PROPORTION
O. [Identification / Installation]
P. [Terminate]

ENTER : OPTION : A

شكل رقم (١٢ - ١) الاختيارات الأساسية لبرنامج ميكروستات

من شاشة الاختيارات الأساسية نختار أول اختيار (A) والخاص بإدخال البيانات ومعالجتها وهو أول عملية في إدخال واستخدام هذا البرنامج في تحليل البيانات والتي تعتمد عليها باقي الاختيارات في التحليل ، تظهر بعد ذلك شاشة أخرى لعمليات ادخال وتصحيح وعرض ومعالجة البيانات كما هو موضح بالشكل (١٢ ــ ٢) أدناه ومعناها :

DATA MANAGEMENT SUBSYSTEM

DATA FILE OPTIONS :

A. ENTER DATA
B. LIST DATA
C. EDIT DATA
D. RENAM FILE/EDIT HEADER
E. FILE DIRECTORY
F. DESTROY FILES
G. RECODE/TRANSFORM/SELECT
H. DELETE CASES
I . VERTICAL AUGMENT
J. SORT
K. RANK-ORDER
L. LAG TRANSFORMATIONS
M. READ/WRITE EXTERNAL FILES
N. TRANSPOSE FILE
O. [Terminate]

ENTER : OPTION : A

شكل رقم (١٢ ــ ٢)
اختيارات إدخال ومعالجة البيانات

إلغاء مشاهدات من ملف	H	ادخال بيانات في ملف	A
الزيادة الرأسية للبيانات (المتغيرات)	I	عرض بيانات من ملف على الشاشة أو الطابعة	B
ترتيب البيانات تصاعدياً	J	تصحيح بيانات في ملف	C
إيجاد رتب بيانات	K	تغيير اسم ملف أو عنوان بياناته	D
تحويلات الفرق الزمني للمتغيرات	L	عرض أسماء الملفات المتوفرة	E
قراءة ملفات من غير برنامج ميكروستات	M	إلغاء الملفات غير المرغوب فيها	F
تحويل المشاهدات إلى متغيرات والعكس .	N	اختيار لخلق متغيرات جديدة من أخرى في الملف أو ترميز البيانات أو دمج بيانات ملفين معاً أو اختيار بعض متغيرات ملف معين وإدعاها في ملف آخر	G
اختيار الانتهاء من هذه الاختيارات والرجوع إلى الاختيارات الأساسية	O		

وللبدء بإدخال البيانات نقوم باختيار إدخال البيانات (A) من الشكل (١٢ ـ ٢) لتظهر لنا شاشة أخرى تحتوي على أربعة اختيارات أخرى كما يتضح في شكل (١٢ ـ ٣) على النحو التالي :

خلق ملف جديد لبيانات	A
إضافة بيانات جديدة إلى ملف قديم	B
إضافة مشاهدات في أماكن محددة من ملف قديم	C
اختبار إنهاء والعودة إلى الخيارات السابقة	D

ولخلق بيانات جديدة نقوم باختيار (A)

A. ENTER DATA.

OPTIONS :
A. START NEW FILE
B. ADD DATA TO EXISTING FILE
C. INSERT CASE (S) INTO EXISTING FILE
D. [Terminate]

ENTER : OPTION : A

شكل (١٢ ـ ٣)
اختيارات طرق إدخال البيانات

يقوم البرنامج بعدها بالسؤال عن اسم الملف المراد استخدامه في وضع البيانات فنضع اسم (EXP 2 - 1)مثلاً حيث سندخل فيه بيانات المثال رقم (٢ ـ ١) في الفصل الثاني من الكتاب والخاصة بدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة ، ليقوم البرنامج بالسؤال عن وصف الملف (File Lablel)وهي عملية اختيارية ، فنقوم بكتابة : «Grade of 80 Students in Accounting» لوصف بيانات الملف . بعدها يقوم البرنامج بالسؤال عن عدد المتغيرات المراد ادخالها في الملف ومن ثم عن اسمائها وفي النهاية يتأكد البرنامج من صحة المعلومات قبل الاستمرار وذلك بالسؤال عن صحتها فإن كانت كذلك أجبنا بنعم [Y] . وشكل (١٢ ـ ٤) التالي يوضح هذه الخطوات :

اسم الملف	ENTER : FILE NAME : [EXP 2 - 1]
وصف بيانات الملف	ENTER : FILE LABEL :
	[Grade of 80 Stusents in Accounting]
عدد المتغيرات	ENTER: NUMBER OF VARIABLES : [1]
اسم المتغير	ENRER: NAME FOR VARIABLE 1 : [grade]
التأكد على صحة الأسماء	NAMES OK (Y, N) ? [Y]

شكل (١٢ ـ ٤)

خطوات ادخال بيانات ملف (EXP 2-1)

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض جدول من الأوامر المساعدة في عملية إدخال البيانات أثناء عملية الإدخال وهي كما في الشكل أدناه تعني :

الرجوع إلى المتغير السابق لنفس المشاهدة	B
الرجوع إلى بداية المشاهدة (أول متغير في المشاهدة)	R
إدخال رقم المشاهدة كقيمة للمتغير	=
فاصلة أو مسافة لإدخال قيمة المتغير للمشاهدة السابقة	, or Space
نقطة للبيانات المفقودة عن المتغير المراد إدخال قيمته	
زر الإدخال لإدخال صفر أو القيمة السابقة (للمتغير السابق من نفس المشاهدة).	Return ↵
الأرقام من صفر إلى ٩ لإدخال القيمة الرقمية ـ عدا ذلك فإن البرنامج لن يقبل خلاف ذلك.	0-9
اختيار إنهاء عملية الإدخال والبدء بتخزين الأرقام في الملف	End

Input Character Summary (See Manual for Details)

Character(s)	Result
B	Back-up one entry
R	Restart at beginning of case
=	Enters case number
, or space	Enters value for previous case
	Enters Missing data code
RETURN	Enters 0 or previously entered data
END	Terminates data input
Other	Enters a number if valid, else error message

PRESS ANY KEY TO CONTINUE.

بعد ذلك نقوم بإدخال درجات الثمانين طالباً في مادة المحاسبة للمثال (٢ ـ ١) وهي كما يلي :

HEADER DATA FOR : A : EXP 2 - 1 LABEL: grade of 80 students in accounting

NUMBER OF CASES: 80 NUMBER OF VARIABLES: 1

رقم المشاهدة	درجات الطلاب grade
1	93
2	75
3	72
4	60
5	71
6	75
.	.
.	.
.	.
75	61
76	66
77	96
78	79
79	65
80	86
81	E ← إنهاء عملية الادخال

بعد الانتهاء من ادخال البيانات في الملف (EXP 2-1) يعود البرنامج إلى شاشة الاختيارات في الشكل (١٢ - ٢) سابقاً . وللتأكد من صحة إدخال البيانات سوف نقوم باختيار (B) لعرض البيانات المدخلة والتأكد من صحة إدخالها . لينتقل البرنامج إلى السؤال عن اسم الملف الذي يحتوي على البيانات المطلوبة فنقوم بكتابة اسم الملف (EXP 2-1) ونضغط زر الإدخال .

B. LIST DATA.

OPEN FILE : EXP 2-1 (PRESS 'RETURN' TO USE OPEN FILE)

ENTER : FILE NAME : EXP 2-1 ← اسم الملف الذي يحتوي البيانات المراد عرضها

ملاحظة :

حيث ان الملف (EXP 2 - 1) كان آخر ملف تعامل البرنامج معه فإن البرنامج لا يزال على اتصال مع هذا الملف وهذا يتضح من العبارة السابقة للعبارة التي يطلب فيها البرنامج اسم الملف المطلوب فإن كان الملف المفتوح لدى البرنامج هو الملف المطلوب التعامل معه فإننا نكتفي بالضغط على زر الإدخال [↵] ليقوم البرنامج بالتعامل مع نفس الملف .

يقوم البرنامج بعدها بعرض معلومات عن عدد المتغيرات وعدد المشاهدات في الملف المختار وكذلك أسماء وأرقام المتغيرات فيه ثم يعرض البرنامج طرق اختيار العرض : على الشاشة ، على صفحة جديدة من الطابعة أو على نفس الصفحة في الطابعة أو طباعة النتائج في ملف يخزن على أقراص التخزين «Diskette» في الصورة التالية :

```
OPTIONS : A. SCREEN OUTPUT
          B. PRINTER OUTPUT WITH FORMFEEDS
          C. PRINTER OUTPUT WITHOUT FORMFEEDS
          D. TEXT FILE OUTPUT
          E. OUTPUT PRINTER SET-UP CODES
          F. CHANGE PRINTER WIDTH. CURRENT VALUE: 80
ENTER : OPTION : A
```

ولعرض البيانات على الشاشة نقوم باختيار (A)

OPTIONS : A. LIST ALL CASES (80)

B. LIST SUBSET OF CASES

ENTER : OPTION : [A] ←- - - - - - - -اختيار عرض جميع المشاهدات

OPTIONS : A. LIST ALL VARIABLES WITH SAME FORMAT
B. LIST SELECTED VARIABLES AND/OR SELECTED FORMATS

ENTER: OPTION: [A] _ _ _ _ _ _ _ _اختيار عرض جميع المتغيرات بنفس المواصفات

ENTER : NUMBER OF PLACES TO BE DISPLAYED TO RIGHT OF DECIMAL : [0]

↑
-----عدد الخانات العشرية بعد الفاصلة .

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عمّا إذا أردنا عرض جميع المشاهدات وعددها ٨٠ مشاهدة هنا أم أجزاء مختارة منها فنقوم باختيارها كلها (الاختيار A) بعدها يقوم البرنامج بالسؤال عمّا إذا أردنا عرض جميع المتغيرات بنفس الصورة (أي بنفس عدد الأرقام العشرية بعد الفاصلة العشرية) أم أننا نود اختيار طريقة للعرض مختلفة بالنسبة لكل متغير فنقوم باختيار الأول (A) ثم يسأل البرنامج عن عدد الأرقام العشرية بعد الفاصلة فنختار الرقم (صفر) للدلالة على أننا نود عرض جميع المتغيرات بدون كسور عشرية . وبعد الضغط على رقم صفر (0) تظهر على الشاشة البيانات السابقة للمثال (٢ ـ ١) .

فإذا كان هناك أخطاء في البيانات فإننا نحتاج إلى تسجيل رقم المشاهدات التي تحتوي أخطاء لنعود ونصححها باستخدام الاختيار (C) في الشكل (١٢ ـ ٢) السابق والخاص بتصحيح البيانات حيث

يقـوم هـذا الاختيـار بـالسؤال عن اسم الملف ثم عن رقم المشـاهـدة التي تحتوي على الخطأ ومن ثم يعـرض قيم المشاهـدة لكل متغيـر على حدة فـإن كـانت القيمة صحيحـة فإننـا نبقيها كمـا هي بـالضغط على الـزر [↵] وإن كـانت خطأ وضعنـا القيمة الصحيحـة وهكذا بـالنسبة لبـاقي المتغيرات وبـاقي المشاهدات التي تحتوي على أخطاء .

ومن الشـاشة الخـاصة بـإدخال البيـانـات في شكـل (١٢ ــ ٢) يمكن كذلك اختيـار (G) وذلك لـدمج بيـانات ملفين في ملف واحـد أو اختيار بعض متغيرات ملف معيّن وتخزينها في ملف آخر بـاسم جديـد كما يمكن استخـدام متغيرات ملف معيّن وخلق متغيرات جديدة منها باستخدام العمليات الرياضية المتوفرة في هذا الاختيار والتي يوضحها الشكل (١٢ ــ ٥) أدناه وهي :

مقلوب متغيـر معيّن ولوغـاريتمـات طبيعيـة وعشـريـة ودالـة أسيـة ودوال خطية وجمع وضرب وطرح وقسمة متغيرين وعمليات أخرى .

TRANSFORMATION CODES :

A.	1/X	L.	X1 + X2	T.	CASE NO.
B.	LOG (X)	M.	X1 − X2	U.	COPY
C.	LN (X)	N.	X1 * X2	V.	SCALING
D.	EXP (X)	O.	X1 / X2		
E.	X ^ a	P.	SUMX1: X2	W.	DUMMY
F.	a + b* X			X.	RECODE
G.	Z-TRANS	Q.	RND NO.		
H.	ABS (X)	R.	RND INT	Y.	[REVIEW]
I.	ROUND (X)	S.	RND NORM	Z.	[EXOT]
J.	TRUNC (X)				
K.	FRAC (X)				

ENTER MENU SELECTION FOR RECODE/TRANSFORMATION NO. 1. (MAX = 250). ENTER : CODE :

شكل (١٢ــ ٥) التحويلات الرياضية التي يوفرها البرنامج عبر الاختيار (G) من شكل (١٢ ــ ٢)

بعد الخطوات السابقة والتأكد من صحة البيانات المدخلة فإن البيانات سوف تخزن في الملف (EXP 2 - 1) لاستخدامها في المستقبل حتى وإن تم إغلاق جهاز الحاسب الآلي، بعد ذلك دعنا نترك هذه الاختيارات لإدخال ومعالجة البيانات ونعود إلى شاشة الاختيارات الأساسية في شكل (١٢ ـ ١) وذلك بالاختيار (O) وهو اختيار إنهاء عمليات الإدخال والتعديل للبيانات «Terminate» عند ذلك يمكننا الاستمرار في حساب المقاييس الاحصائية المختلفة على البيانات المتوفرة في الملفات المخلقة سابقاً أو ننهي البرنامج ونغلق الجهاز لنعود مرة أخرى في وقت لاحق لتحليل هذه البيانات .

بنفس الخطوات السابقة يمكن خلق ملفات لكل من الأمثلة ، (٤ ـ ٢) ، (٥ ـ ٥) ، (٧ ـ ١) ، (٧ ـ ٥) ، (٨ ـ ١) ، (٨ ـ ٦) في الكتاب وذلك لاستخدامها فيما بعد في التحليل الإحصائي وسوف تحمل هذه الملفات الأسماء : (EXP 4-2) ، (EXP 5-5) ، (EXP 7-1) ، (EXP 7-5) ، (EXP 8-1) ، (EXP 8-6) ، على التوالي .

٢ ـ استخدام البرنامج في تحليل البيانات الاحصائية :

بعد أن رأينا كيف تتم عملية خلق ملف بيانات يتضمن المتغيرات والبيانات الإحصائية وكيفية إدخال المشاهدات وتعديلها وخلق متغيرات جديدة منها ننتقل الآن إلى استخدام الأوامر المختلفة لتنفيذ التحليلات الإحصائية المطلوبة مستخدمين بذلك البيانات الاحصائية المخلقة سابقاً باستخدام أمر تخليق البيانات في هذا البرنامج بالإضافة إلى بيانات أخرى . وسوف نستخدم البيانات هذه في إيجاد مقاييس إحصائية بسيطة (وسط حسابي ـ انحراف معياري ـ . . . . .) ، خلق جداول تكرارية من بيانات خام ، معاملات الارتباط الخطي وتحليل الانحدار الخطي البسيط

والمتعـدد ، مستخدمين بـذلك الاختيـارات الأساسيـة التاليـة لهـذا البـرنـامـج وهي : (B ، C ، G ، H) على التوالي .

* المقاييس الاحصائية الوصفية :

لاختيـار أمر تنفيـذ حساب المقـاييس الاحصائيـة الـوصفيـة نضغط على الاختيـار (B) من قائمـة الاختيارات الأسـاسية لبـرنـامـج Microstat في شكـل (١٢ ــ ٢) ليقـوم البـرنـامـج بعـدهـا بـإدخـالنـا إلى مجمـوعـة من الأوامـر والاختيـارات الأخرى الخـاصة بهـذه العمليـة بـدءاً بـالسؤال عن اسـم الملـف الذي يحتوي البيانات الاحصائية المراد إيجاد مقاييسها الاحصـائية الـوصفية . وسـوف نستخـدم هنـا بيـانـات المثـال (٤ ــ ٢) في الكتـاب أي ملف (EXP 4-2) .

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عمّا إذا أردنـا إدخال جميـع المشاهـدات في الملـف في حسـاب المقاييس الاحصـائية الـوصفية للمتغيـرات أم جزء منها . وسـوف نختـار الاختيــار (A) للدلالـة على أننـا سـوف نستخـدم جميـع المشاهدات .

يقـوم البرنـامج بعـد ذلـك بعـرض اختيـارين أحـدهمـا يتضمن الـوسط الحسـابي ، الانحـراف المعيـاري أكبـر قيمـة وأصغـر قيمـة للمتغيـرات وهـو الاختيار (A) أما الاختيار (B) فيتضمن جميع المقاييس السابقـة وأكثر . فـدعنا نجرب الاختيار (A) كما يلي :

```
OPTIONS : A. SHORT FORM OUTPUT (MEAN, STD. DEV., MIN, MAX)
          B. EXTENDED OUTPUT OF SELECTED VARIABLES
          C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION : [ A ]
```

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض عدة طرق لإخراج النتائج هي :

A. إخراج النتائج على شاشة الجهاز

B. إخراج النتائج على الطابعة مع بدء صفحة جديدة

C. إخراج النتائج على الطابعة بدون التقدم صفحة جديد

D. إخراج النتائج على ملف الكتروني مخزون في أقراص تخزين

أو اختيارات أخرى لتغيير شكل الطباعة على الطابعة

```
OPTIONS :  A. SCREEN OUTPUT
           B. PRINTER OUTPUT WITH FORMFEEDS
           C. PRINTER OUTPUT WITHOUT FORMFEEDS
           D. TEXT FILE OUTPUT

           E. OUTPUT PRINTER SET-UP CODES
           F. CHANGE PRINTER WIDTH.   CURRENT VALUE: 80

ENTER : OPTION : [ A ]
```

ولاختيار عرض النتائج على الشاشة نختار (A)

يقوم البرنامج بعدها بحساب المقاييس الوصفية الأربعة وإظهارها للمتغير (X) في الملف (EXP 4-2) والذي يحتوي القيم التالية : ٦٤٥ ، ٦٥٥ ، ٦٦٥ ، ٦٧٥ ، ٦٨٥ ، كما هو واضح أدناه حيث يظهر عدد المشاهدات ، المتوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، أقل قيمة ، وأكبر قيمة لبيانات المتغير (X) .

DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 4-2   LABEL:
NUMBER OF CASES : 5   NUMBER OF VARIABLES : 1

Mean of Variable for Example (4 - 2)

NO.	NAME	N	MEAN	STD. DEV.	MINIMUM	MAXIMUM
1	X	5	665.0000	15.8114	645.0000	685.0000

ولكي نجرب الاختيار (B) في حساب المقاييس الإحصائية البسيطة سوف نختار الاختيار (B) للدلالة على أننا نحتاج إلى المزيد من العمليات الحسابية في هذا البرنامج (برنامج حساب المقاييس الوصفية للمتغيرات). وعند اختيار ذلك تظهر شاشة العرض اسم الملف المستخدم ومعلومات عن أسماء المتغيرات وعددها وعدد المشاهدات فيه .

ثم نختار طريقة العرض المطولة للنتائج (الاختيار B) والذي يتضمن مجموعة كبيرة من المقاييس الاحصائية الوصفية سوف يقوم البرنامج بعرضها والسؤال عمّا إذا كنا نود حساب كل منها .

وكذلك نختار طريقة عرض النتائج على شاشة الجهاز (الاختيار A) .

```
OPTIONS :  A. SHORT FORM OUTPUT (MEAN, STD. DEV., MIN, MAX)
           B. EXTENDED OUTPUT OF SELECTED VARIABLES
           C. [ Terminate ]

ENTER : OPTION : [ B ]
```

بعد ذلك يقوم البرنامج بعرض أسماء المقاييس الإحصائية الوصفية التي يمكنه حسابها والسؤال عمّا إذا كنا نود حساب كل منها بالإجابة بـ (Y) أو لا نريد فنجيب بـ (N) . وهذه المقاييس هي على التوالي : الوسط الحسابي ، التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للعينة ، التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للمجتمع ، الخطأ المعياري ، أكبر وأصغر القيم ، المجموع ومجموع المربعات ومجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي ، العزوم حول الوسط الحسابي ومعامل الالتواء ومعامل التفرطح ، وأخيراً الاختبار الطبيعي لجودة التوفيق ونختار أياً منها بالإجابة بـ (Y) وقد اخترناها جميعاً أدناه فيما عدا الاختبار

الطبيعي لجودة التوفيق حيث أنهى البرنامج سلسلة المقـاييس بالسؤال والتـأكيد على صحة اختيارنا فأجبنا بنعم (Y) .

ليقوم البرنـامج بعـدها بـالسؤال عن رقم المتغير المـراد حساب ذلـك له فنضع رقم المتغير وإن لم نتذكر ذلك فإننا نجيب بـ (L) وذلك ليقـوم البرنـامج بعدها بعرض أرقام وأسماء كل المتغيرات المتوفرة في الملف .

SELECT WHICH OF THE FOLLOWING VALUES ARE TO BE CALCULATED:

ARITHMETIC MEAN (Y, N) ? | Y |

SAMPLE STANDARD DEVIATION, VARIANCE, AND COEFF. OF VAR. (Y, N) ? | Y |

POPULATION STANDARD DEVIATION, VARIANCE, AND COEFF. OF VAR. (Y,N)? | Y |

STANDARD ERROR (Y, N)? | Y |

MAXIMUM, MINIMUM (Y, N)? | Y |

SUM, SUM OF SQUARES, DEVIATION SS (Y, N)? | Y |

MOMENTS ABOUT MEAN, SKEWNESS, KURTOSIS (Y, N)? | Y |

NORMAL DISTRIBUTION GOODNESS OF FIT TEST (Y, N)? | N |

SELECTION OK (Y, N)? | Y |

بعد ذلك نختار المتغير المـراد حساب المقـاييس الوصفيـة أعلاه لـه من قـائمة المتغيـرات في الملف الذي نتعـامل معـه (لـدينـا في الملف EXP 4-2 متغير واحد فقط هو X) .

يقوم البرنامج بعد ذلك بعـرض المقاييس السـابقة للمتغيـر (X) كما هي مبينة أدناه :

DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 4 - 2   LABEL :
NUMBER OF CASES: 5   NUMBER OF VARIABLES : 1

extended summary statistics for example (4-2)

VARIABLE NAME : X   N = 5

extended summary statistics for example (4-2)

ARITHMETIC MEAN = 665
SAMPLE STD. DEV. = 15.811388301
SAMPLE VARIANCE = 250
COEFFICIENT OF VARIATION = 2.377652376%

POPULATION STD. DEV. = 14.142135624
POPULATION VARIANCE = 200
COEFFICIENT OF VARIATION = 2.126636936%

STANDARD ERROR OF THE MEAN = 7.071067812

MINIMUM = 645
MAXIMUM = 685

SUM = 3325
SUM OF SQUARES = 2212125
DEVIATION SS = 1000

1ST MOMENT = 0
2ND MOMENT = 200
3RD MOMENT = 0
MOMENT COEFFICIENT OF SKEWNESS = 0
4TH MOMENT = 68000
MOMENT COEFFICIENT OF KURTOSIS = 1.7

لإنهاء هذا الاختيار والعودة إلى شاشة الاختيارات الأساسية في شكل (١٢ ــ ١) نقوم باختيار (E) عند السؤال عن رقم المتغير التالي ، لنعود إلى الاختيارات في إعادة النتائج أو إعادة العمليات الحسابية للمقاييس الوصفية أو إنهاء هذا البرنامج والعودة إلى الشاشة الأساسية للاختيارات فنختار الانهاء . كما هو موضح أدناه .

ENTER: VARIABLE TO BE OUTPUT
(E = End, L= List VAR. NAMES) : | E |

OPTIONS : A. REPEAT OUTPUT
B. MORE COMPUTATIONS
C. [Terminate]

ENTER : OPTION : | C |

* تكوين الجداول التكرارية :

عندما يصل البرنامج إلى شاشة الاختيارات الأساسية مرة أخرى نستطيع بعدها اختيار أي عملية إحصائية أخرى وتنفيذها لنفس الملف المفتوح أو اختيار ملف بيانات آخر . ولتكوين جدول تكراري لبيانات المثال (٢ ــ ١) والخاص بدرجات ٨٠ طالباً في مادة المحاسبة نختار (C) من قائمة الاختيارات الأساسية من الشكل (١٢ ــ ١). وبعد اختيار اسم الملف المراد استخدامه (EXP 2-1) يقوم البرنامج بعرض اختيارين ، (A) وخاص بتكوين الجداول التكرارية و (B) وخاص بعدد القيم في الملف المستخدم والتي تساوي قيمة معيّنة مختارة لمتغير محدد في الملف فنختار (A) . ثم نختار طريقة عرض النتائج على الشاشة ونحدد طول فترة الجدول التكراري لتكون ٥ درجات والقيمة الابتدائية للفترة الأولى في الجدول التكراري (أي الحد الأدنى للفئة الأولى) لتكون ٥٠ حيث لا توجد درجة أقل من ذلك .

OPTIONS : A. GROUPED FREQUENCY DISTRIBUTION
B. COUNT INDIVIDUAL VALUES
C. [Terminate]

ENTER : OPTION : | A |

ENTER PARAMETERS FOR GROUPED FREQUENCY DISTRIBUTION.

ENTER : INTERVAL WIDTH : | 5 |

ENTER : LOWER LIMIT OF FIRST INTERVAL : | 50 |

يقوم البرنامج بعد ذلك بعرض البيانات أدناه والتي تعرض بعض المقاييس الوصفية ثم عدة جداول تكرارية للدرجات هي على التوالي . الجدول التكراري البسيط (FREQUENCY) والذي يماثل جدول (٢ ـ ١٠) في الفصل الثاني ثم الجدول التكراري النسبي (PERCENT) ثم الجدول التكراري المتجمع الصاعد للبيانات الأصلية وللنسب (CUMULATIVE) ثم بعد ذلك يرسم البرنامج المدرج التكراري للبيانات كما هو موضح أدناه :

DESCRIPTIVE STATISTICS

HEADER DATA FOR : A : EXP 2 - 1
LABEL : grade of 80 students in accounting
NUMBER OF CASES : 80 NUMBER OF VARIABLES : 1

mean of variable for example (2 - 1)

NO.	NAME	N	MEAN	STD. DEV.	MINIMUM	MAXIMUM
1	grade	80	75.1750	10.0263	53.0000	97.0000

FREQUENCY DISTRIBUTIONS

HEADER DATA FOR : A : EXP 2 - 1
LABEL : grade of 80 students in accounting
NUMBER OF CASES : 80 NUMBER OF VARIABLES : 1

VARIABLE :1 . grade

frequancy table for example (2 - 1)

CLASS	LIMITS	FREQUENCY	PERCENT	CUMULATIVE FREQUENCY	CUMULATIVE PERCENT
50.00<	55.00	1	1.25	1	1.25
55.00 <	60.00	2	2.50	3	3.75
60.00 <	65.00	10	12.50	13	16.25
65.00 <	70.00	10	12.50	23	28.75
70.00 <	75.00	12	15.00	35	43.75
75.00 <	80.00	22	27.50	57	71.25
80.00 <	85.00	9	11.25	66	82.50
85.00 <	90.00	6	7.50	72	90.00
90.00 <	95.00	4	5.00	76	95.00
95.00 <	100.00	4	5.00	80	100.00
	TOTAL	80	100.00		

CLASS LIMITS		FREQUENCY	
50.00 <	55.00	1	=
55.00 <	60.00	2	==
60.00 <	65.00	10	===============
65.00 <	70.00	10	===============
70.00 <	75.00	12	=================
75.00 <	80.00	22	======================================
80.00 <	85.00	9	=============
85.00 <	90.00	6	========
90.00 <	95.00	4	======
95.00 <	100.00	4	======

ثم نعـود بعد ذلـك إلى شاشـة الاختيارات الأسـاسية في شكـل (١٢ ــ ٢) .

*** معامل الارتباط الخطي :**

لإيجاد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين (س، ص) في المثال (٧ ــ ١) في الفصل السابع والموجود في الملف(EXP 7- 1) تحت الاسمين (X) ، (Y) على التوالي ، نقوم باختيار (G) من الشاشة في الشكل (١٢ ــ ٢) وهو الاختيار الخاص بايجاد معاملات الارتباط بين المتغيرات المختلفة في الملف المستخدم وكـذلك ايجـاد مجاميـع مربعـات قيم المتغيرات المختلفة .

بعد الدخول في برنامج حساب معاملات الارتباط يقوم البرنامج بالسؤال عن اسم ملف البيانات والأسئلة الأخرى عن بيانات الملف ، ثم يسأل عما إذا كنا نريد ايجاد معاملات الارتباط لجميع المتغيرات أم جزء

منها وسوف نختار هنا جميع المتغيرات في الملف (EXP 7 - 1) وهما المتغيرين (X) ، (Y) .

```
OPTIONS :  A.  CORRELATE ALL VARIABLES
           B.  CORRELATE SELECTED VARIABLES

ENTER :  OPTION : [ A ]
```

ثم يقوم البرنامج بالسؤال عن عنوان العملية فنجيب بالضغط على زر الادخال [↵] للدلالة على أننا لا نود أن نكتب أي عنوان ، ليقوم البرنامج بالسؤال عن طريقة عرض النتائج فنختار الشاشة مثلاً .

ثم يقوم البرنامج بعدها بعرض ثلاثة اختيارات هي :

عرض مصفوفة معاملات الارتباط الخطي للمتغيرات A.

عرض مصفوفة التباين ومصفوفة مجاميع المربعات B.

عرض كل من المصفوفات في (A) وفي (B) أعلاه C

```
OPTIONS :  A.  OUTPUT CORRELATION MATRIX
           B.  OUTPUT SSCP AND VAR - COVAR.
           C.  ALL OF THE ABOVE

ENTER : OPTION : [ A ]
```

فنختار (A) للدلالة على أننا نود الحصول على مصفوفة معاملات الارتباط الخطي البسيط فقط . بعدها يعرض البرنامج المصفوفة المطلوبة والتي تمثل معامل الارتباط بين المتغيرين . حيث يمثل تقاطع الصف مع العمود معامل الارتباط بين المتغير الذي يمثل الصف والمتغير الذي يمثل العمود . فمثلاً تمثل القيمة (١) الواقعة بين تقاطع العمود المقابل للمتغير (X) والصف المقابل للمتغير (Y) معامل الارتباط بين المتغيرين (Y, X) وهو ارتباط طردي تام كما توضحه النتائج التالية :

CORRELATION MATRIX

HEADER DATA FOR : A : EXP 7 - 1 LABEL :
NUMBER OF CASES : 5 NUMBER OF VARIABLES : 4

	X	Y
X	1.00000	
Y	1.00000	1.00000

ولحساب معامل ارتباط الرتب (معامل ارتباط سبيرمان) لنفس البيانات في مثال (٧ ــ ٥) نقوم أولاً بادخال قيم المتغيرين (س ، ص) تحت اسم (Y, X) على التوالي في ملف يحمل الاسم (EXP 7 - 5) مثلاً ثم نستخدم الاختيار (G) من بين الاختيارات في شكل (١٢ ــ ٢) لاستخدام الدوال الرياضية للبرنامج وبعض الاستخدامات السابق ذكرها عند التعامل مع الملفات مستخدمين هذا الاختيار ثم من شاشة الدوال في شكل (١٢ ــ ٥) نقوم باختيار (U) وذلك لنسخ المتغيرين (Y, X) تحت اسمين جديدين هما (X-Order) و (Y-Order) وبالتالي فإن الملف المستخدم سوف يحتوي على ٤ متغيرات هي (Y , X) ، (X-Order) ، (Y-Order) ثم نخرج من شاشة الاختيارات في الشكل (١٢ ــ ٥) بواسطة الاختيار Z (EXIT) لنعود إلى شاشة ادخال وتعديل البيانات في الشكل (١٢ ــ ٢) حيث نختار الاختيار (K) والخاص بإيجاد رتب المتغير حيث يقوم هذا الاختيار بإبدال القيم في كل من المتغير (X-Order) والذي يحتوي قيم المتغير (X) بقيم رتب (X) وكذلك الحال بالنسبة للمتغير (Y-Order) حيث تستبدل قيم (Y) فيه برتب المتغير (Y) وذلك بعد تحديد المتغيرات المراد ايجاد رتبها من الملف (EXP 7 - 5) بالمتغيرين (X-Order) و (Y-Order) فقط من مجموع المتغيرات الأربعة في هذا الملف . نعود بعد كل ذلك إلى شاشة الاختيارات الأساسية في الشكل (١٢ ــ ١) حيث سيكون الملف المستخدم (EXP 7-5) يحتوي

على قيم (Y , X) الأصليـة ورتب هـذه القيم في المتغيـرين (X-Order) و (Y-Order) . ثم نختـار (G) من شـاشـة الاختيـارات الأسـاسيـة في الشكـل (١٢ ــ ٢) ونوجد معامل الارتبـاط بين (X-Order) و (Y-Order) لنحصل كمـا في السابق على معامل ارتباط هذين المتغيرين الذي هو معـامل ارتبـاط الرتب للمتغيرين (Y , X) أي معامل ارتباط سبيرمان الخطي . والشكل التـالي يمثل نتـائج ذلـك للمثـال (٧ ــ ٥) حيث معـامـل ارتبــاط الـرتب بين (X) و (Y) يساوي ٠,٥١٠٨٦ .

HEADER DATA FOR : A : EXP 7 - 5 LABEL : rank correlation of example (7 - 5)

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 4

	X	Y	x-order	y-order
1	33.0	18.0	7.5	1.0
2	27.0	20.0	1.0	2.0
3	28.0	22.0	2.5	4.0
4	28.0	27.0	2.5	5.5
5	29.0	21.0	4.0	3.0
6	30.0	29.0	5.0	9.0
7	31.0	27.0	6.0	5.5
8	33.0	29.0	7.5	2.0
9	35.0	28.0	9.0	7.0
10	36.0	29.0	10.0	9.0

CORRELATION MATRIX

HEADER DATA FOR : A : EXP 7 - 5 LABEL : rank correlation of example (7-5)

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 4

spearman's rank corr. for example (7 - 5)

	x-order	y-order
x-order	1.00000	
y-order	.51086	1.00000

* **نماذج تحليل الانحدار الخطي :**

ولاستخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معاملات الانحدار للنماذج الخطية البسيطة والمتعددة يستخدم الاختيار (H) (تحليل الانحدار الخطي) في شكل (١٢ ــ ١) حيث يمكن بواسطة هذا الاختيار تقدير كل من أ ، ب (a , b) في نموذج الانحدار الخطي البسيط للمتغيرين ص ، س (X , Y) في الصورة

ضَ = أ + ب س أي

$$\hat{Y} = a + bX$$

وكذلك اختبار صلاحية هذا النموذج في تمثيل العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغير المستقل (X) عن طريق تحليل التباين .

ويمكن استخدام النماذج الخطية في هذا الاختبار عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل واحد (متغيرين مستقلين X_1 ، X_2 مثلاً أو أكثر) حيث يكون النموذج الخطي في حالة المتغيرين المستقلين في الصورة :

ضَ = أ + ب١ س١ + ب٢ س٢ أي :

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

ويمكن اختبار صلاحية النموذج في تمثيل العلاقة مع المتغير المستقل (Y) وكذلك صلاحية وجود كل من المتغيرات المستقلة في العلاقة .

ولإيضاح ذلك سوف نختار (G) من قائمة الاختيارات في شكل (١٢ ــ ١) .

بعد الدخول في برنامج تحليل الانحدار يقوم البرنامج بالسؤال عن اسم الملف الذي يحتوي البيانات وسوف نستخدم بيانات المثال (٨ ــ ١)

والـذي يحتـوي على درجـات ١٠ طـلاب في مـادة المحـاسبـة (X) ومـادة الاحصـاء (Y) (الـدرجـة من ٢٠) . يقـوم البـرنـامج بعـرض معلومـات عن الملف ثم يسـأل عمّا إذا أردنـا التعامـل مع جميـع المشاهـدات أم جـزء منهـا وعمّـا إذا أردنا التعـامل مـع جميع المتغيـرات أم جزء منهـا وسوف نختـار هنا جميع المشاهدات العشر وجميع المتغيرات (X) ، (Y) . ثم يطلب البرنامج رقم المتغيـر التابـع (Dependent) في النمـوذج المـراد تقـديـره وسـوف نختـار المتغيـر رقم (٢) أي (Y) ضمن سلسلة المتغيـرات في الملف حيث يحمـل (X) رقم (١) و (Y) رقم (٢) أي أننا سوف نتنبـأ بدرجـة الطالب في الاحصـاء (Y) بـدلالـة درجتـه في المحـاسبـة (X) . بعـدهـا يعـرض البـرنـامج أسمـاء المتغيرات المستقلة والمتغير التـابع وأرقـام كل منهـا مع مقـاييس وصفية لكـل منهـا تحتوي على المتـوسط الحسابي والانحـراف المعياري كمـا يتضح فيمـا يلي :

HEADER DATA FOR : A : EXP 8 - 1
LABEL : grade of ten students in acc. and stat.
NUMBER OF CASES : 10
NUMBER OF VARIABLES : 2

	x	y
1	11	19
2	7	11
3	15	16
4	9	15
5	6	10
6	8	8
7	9	7
8	9	12
9	13	15
10	13	17

REGRESSION ANALYSIS

HEADER DATA FOR : A : EXP 8 -1 LABEL : grade of ten students in acc. and stat.

NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 2

INDEX	NAME	MEAN	STD. DEV.
1	x	10.0000	2.9059
DEP. VAR. :	y	13.0000	4.0000

يقوم بعدها البرنامج بالاستفسار عن عدد المتغيرات المستقلة (Independent) المراد استخدامها في النموذج الخطي فنقوم بكتابة (١) للدلالة على أننا سنستخدم متغيراً مستقلاً واحداً (نموذج انحدار خطي بسيط) ومتغيراً تابعاً واحداً . بعد ذلك يقوم البرنامج بالسؤال عن دليل المتغير المستقل (رقم المتغير) من السلسلة السابقة مباشرة لأرقام المتغيرات التي قام البرنامج بعرضها فنختار رقم (١) للدلالة على المتغير (X) ثم يتأكد البرنامج من صحة اختيارنا فنجيب بنعم(Y) ومن ثم يسأل عمّا إذا أردنا حساب الانحرافات وحساب مقياس (دربن واتسون) فنختار الأول ونرفض الثاني مثلاً ثم يستفسر البرنامج عن عدد الأرقام بعد الفاصلة العشرية المراد استخدامها في عرض النتائج لنختار رقماً بين الصفر و٩ (الرقم المبدئي هو ٤ أرقام عشرية) ، ولاختيار الرقم المبدئي نضغط على زر الادخال [↵] ليقوم البرنامج بعرض نتائج تحليل الانحدار البسيط بين (Y) ، (X) على أساس النموذج الخطي : ($\hat{Y} = a + bx$) ويعرض كذلك نتائج تحليل التباين للانحدار الخطي البسيط كما يلي :

ENTER : INDEX OF PREDICTOR VARIABLES : [1]

SELECTION OK (Y, N) ? [Y]

CALCULATE RESIDUALS (N, Y) ? [Y]

DURBIN - WATSON TEST (N, Y) ? [N]

enter : NUMBER OF DECIMAL PLACES TO BE DISPLAYED FOR COEFFICIENTS
(VALID RANGE = 0 To 9 ; Default Value O 4) : [4]

وكمـا يتضـح من النتـائـج أدنـاه فـإن a = ٣,٥٢٦٣ و b = ٠,٩٤٧٤ معامل الارتباط الخطي ر = ٠,٦٨٨٢ ومعـامل التحـديد ر^{٢} = ٠,٤٧٣٧ كمـا يعـرض قيمـة (Y) الأصليـة و (Y) المتنبـأ بهـا (Calculated) من النمـوذج الخطي . والبواقي أو الانحرافات (Residual) مع توضيح بياني لها .

DEPENDENT VARIABLE : y

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD.ERROR	T(DF= 8)	PROB.
x	.9474 ← (أ)	.3531	2.683	.02778
CONSTANT	3.5263 ← (ب)			

STD. ERROR OF EST. = 3.0779
r SQUARED = .4737
r = .6882

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE	SUM OF SQUARES	D. F.	MEAN SQUARE	F RATIO	PROB.
REGRESSION	68.2105	1	68.2105	7.200	.0278
RESIDUAL	75.7895	8	9.4737		
TOTAL	144.0000	9			

OBSERVED		CALCULATED	RESIDUAL	-2.0 STANDARDIZED RESIDUALS 2.0
1	19.000	13.947	5.0526	*
2	11.000	10.158	.8421	*
3	16.000	17.737	-1.7368	*
4	15.000	12.053	2.9474	*
5	10.000	9.211	.7895	*
6	8.000	11.105	-3.1053	*
7	7.000	12.053	-5.0526	*
8	12.000	12.053	-.0526	*
9	15.000	15.842	-.8421	*
10	17.000	15.842	1.1579	*

ويمكن إجراء نفس التحليل السابق للمثال رقم (٨ ـ ٦) حيث لدينا متغير تابع واحد هو (ص) أو (Y) ومتغيران مستقلان س١ ، س٢ أو X_1 و X_2 حيث نموذج الانحدار الخطي المتعدد على الصورة :

ص̂ = أ + ب١ س١ + ب٢ س٢

أو

$$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

نختار (Y) كمتغير تابع بنفس الطريقة السابقة وذلك بتحديد الرقم المقابل للمتغير (Y) ثم نحدد عدد المتغيرات المستقلة بـ ٢ أي متغيرين مستقلين ثم نحدد أرقام المتغيرين X_1 و X_2 لنحصل أخيراً على النتائج التالية :

REGRESSION ANALYSIS

HEADER DATA FOR : A: EXP 8 - 6 LABEL :
NUMBER OF CASES : 10 NUMBER OF VARIABLES : 3

multiple regression for example (8 - 6)

INDEX	NAME	MEAN	STD. DEV.
1	X1	6.9000	2.5144
2	X2	22.1000	2.0248
DEP. VAR. :	Y	6.5000	2.7588

DEPENDENT VARIABLE : y

VAR.	REGRESSION COEFFICIENT	STD. ERROR	T(DF = 7)	PROB.	PARTIAL r2
x1	.8846	.1962	4.507	.00277	.7438
x2	-.2797	.2437	-1.148	.28884	.1583
CONSTANT	6.5770				

STD. ERROR OF EST. = 1.3999

ADJUSTED R SQUARED = .7425
R SQUARED = .7997
MULTIPLE R = .8943

حيث :

a = ٦,٥٧٧٠

b1 = ٠,٨٨٤٦

b2 = ٠,٢٧٩٧-

معامل الارتباط الكلي (ر) = ٠,٨٩٤٣

معامل التحديد (ر٢) = ٠,٧٩٩٧

ويعرض كذلك معاملات الارتباط الجزئي في العمود الأخير .

ويمكن بعد ذلك تقدير نماذج أخرى بتغيير المتغير التابع أو عدد المتغيرات المستقلة أو اختيار متغيرات مستقلة مختلفة أو حتى استخدام النموذج الخطي المقدر في التنبؤ عندما نحدد قيم معيّنة للمتغيرات المستقلة فيه وذلك باختيار إحدى الاختيارات الستة التالية لتحليل الانحدار :

- اختيار تغير المتغيرات المستقلة لنفس المتغير التابع A.
- اختيار تغير المتغير التابع في النموذج الخطي B.
- إعادة طباعة نتائج التحليل باستخدام الشاشة أو الطابعة أو ملف . C.
- اختيار حساب قيم المتغير التابع المتنبأ بها لقيم معينة من المتغيرات المستقلة . D.

– اختيـار وضع بيـانـات الانحـرافـات والقيم المتنبـأ بهـا مـع ملف البيانات الأصلية . E.

– اختيار انهاء برنامج تحليل الانحدار الخطي . F.

```
OPTIONS :  A. ANOTHER SET OF PREDICTORS FOR DEP. VAR:      Y
           B. CHANGE DEPENDENT VARIABLE
           C. REPEAT OUTPUT FROM PREVIOUS ANALYSIS
           D. CALCULATE PREDICTED VALUES
           E. OUTPUT RESIDUALS TO DATA FILE
           F. [ Terminate ]

ENTER : OPTION :  [ D ]
```

ولاستخدام النموذج المقدر السابق :

ص = ٦,٥٧٧٠ + ٠,٨٨٤٦ س١ - ٠,٢٧٩٧ س٢

في التنبؤ عندما تكون س١ = ٧ وس٢ = ٢٠ مثلاً نختـار (D) من قائمـة الاختيـارات أعلاه وذلـك لحساب القيمـة المقـدرة لـ (ص أو $\hat{Y}$ Predicted Value) عنـدما تكـون $X_1 = 7$ و $X_2 = 20$ حيث يقوم البـرنـامـج بـالسؤال عن قيم كـل من (X_1) و (X_2) المشاهـدة ثم يحسب القيمـة المتنبـأ بهـا ويـطبعهـا على الشاشة :

Calculated Y Value = 7.1752

أي ص = ٧,١٧٥٢

نكتفي بهـذا القـدر من الأمثلة على استخـدام بـرنـامـج ميكـروستـات «Microstat» في ادخال وتعديل وتحليل البيانات الاحصـائية . وتجـدر الإشارة إلى أن هذا البرنامج يمكن استخدامه في :

* تحليل السلاسل الزمنية (Time Series Analysis)

* اختبارات الفروض الاحصائية للمتوسطات الحسابية (Hypothesis Tests: Mean)
* اختبارات الفروض الاحصائية للنسب (Hypothesis tests: Proportions)
* اختبارات تحليل التباين (Analysis of Variance)
* الاختبارات اللامعلمية (Non Parametric Statistics)
* رسم أشكال الانتشار (Scatter Diagrams)

إضافة إلى مجموعة أخرى من العمليات والتوزيعات الاحصائية الأخرى .

ثانياً : استخدام SPSS(*)
في تحليل البيانات

برنامج «SPSS» هو أحد البرامج الاحصائية الكبيرة والتي عرفت في الستينات وعلى المستوى العالمي من خلال انتشار استخدامها على الحاسبات الكبيرة «Main Frames» ، و«SPSS» هو الرمز المختصر للاسم : «Statistical Package for the Social Science» والذي يعني «البرامج الاحصائية للعلوم الاجتماعية» . وقد عرف هذا البرنامج كأحد البرامج الاحصائية التي تستخدم من خلال الحزم «Batch» أي أن المستخدم عليه أن يكتب جميع خطوات وأوامر البرنامج المراد تنفيذه ومن ثم اعطاؤه للحاسب لتنفيذه مرة واحدة ، غير أنه متوفر الآن في الأسواق على نسخة معدلة وخاصة على الحاسبات الصغيرة « Micro Computers » تستخدم طريقة المحاورة «Interactive Mode» حيث يدخل المستخدم الأمر المراد تنفيذه فيقوم البرنامج بمعالجة هذا الأمر وتنفيذه ومن ثم ينتقل لسؤال المستخدم عن أمر جديد وهكذا . . . .

وسوف نعرض لطريقة استخدام هذا البرنامج من خلال النسخة المتوفرة على الحاسب الشخصي لشركة «IBM»وهي النسخة المسماة «+ SPSS /PC » مستخدمين نفس الأمثلة المستخدمة في الجزء السابق

(*) برنامج «SPSS» تنتجه شركة «.SPSS Inc» وعنوانها :

444 N. Michigan avenue. Chicags, Illinios.

والخـاص بـ «Microstat» . يبدأ تشغيـل برنـامـج « SPSS / PC + » بكتابة أمر التشغيل «SPSSPC» وذلك لادخال البرنامج إلى ذاكرة الحاسب ومن ثم البدء بعملية استخدام البرنامج في تحليل البيانات الاحصائية ، وبعد عرض البرنامج لشعار « SPSS / PC + » يدخلنا إلى شاشة أخرى للبدء في عملية تعريف البيانات وتحليلها حيث ينتهي البرنامج بطباعة : SPSS/PC .

وذلك على يسار الشاشة للدلالة على أننا في برنامج « SPSS / PC + » وأن البرنامج جاهز لتلقي الأوامر والتي يجب أن تطبع بعد علامة « : » .

*** ادخال البيانات :**

أول أمر في برنامج «SPSS» هو أمر تعريف البيانات «Data» وأسماء المتغيرات وطريقة ومكان قراءتها . فلإدخال بيانات المثال رقم (٤ ــ ٢) نستخدم الأمر :

SPSS/PC : data list free/x.

حيث أمر (Data List) يعرف البرنامج بأننا في صدد وضع بيانات وأن طريقة كتابتها هي باستخدام طريقة الكتابة الحرة (Free Format) أي أننا سنفصل بين المتغيرات بمسافة واحدة على الأقل دون تحديد لطريقة كتابة الأرقام . ومن ثم نضع علامة (/) لنبدأ بكتابة أسماء المتغيرات المراد وصفها وهي في مثالنا متغير واحد سوف نسميه (X) وبذلك فإننا قد عرفنا البيانات وأسماء المتغيرات للبرنامج ، ولإنهاء هذا الأمر نطبع نقطة (.) ومن ثم نضغط زر الادخال [↵] للانتهاء من هذا الأمر لينتقل البرنامج لعرض الرمز (:SPSS/PC) مرة أخرى دليلاً على أنه فهم ونفذ الأمر السابق وأنه ينتظر الأمر الجديد . بعد ذلك ندخل أمراً آخر لإدخال البيانات وهو بصورة (Begin Data). ونضغط زر الادخال ليفهم الحاسب بأننا في صدد وضع البيانات مستخدمين لوحة المفاتيح (Key Board) ومن ثم ندخل

البيانات الواحدة تلو الأخرى إلى أن ننتهي من وضع البيانات حيث ننهيها بوضع العبارة (End Data) . عند السؤال عن القيمة التالية للمتغير ليفهم البرنامج بأننا قد انتهينا من وضع البيانات فيطبع البرنامج عبارة تدل على أنه قرأ البيانات وأن عدد المشاهدات فيها هو ٥ مشاهدات . والشكل التالي يبين هذه الخطوات كما تظهر على شاشة الجهاز .

```
SPSS/PC : begin data.

CASE    #    0 | 645 |
CASE    #    1 | 655 |
CASE    #    2 | 665 |   <————————— بيانات المثال
CASE    #    3 | 675 |
CASE    #    4 | 685 |
CASE    #    5   end data.

SPSS/PC has written      5   cases to the active file
```

رقم المشاهدة

* حساب المقاييس الاحصائية الوصفية :

عندما يعود البرنامج إلى طباعة العبارة (SPSS/PC :) للدلالة على أنه فهم الأوامر السابقة وأنه مستعد لأي أوامر أخرى . ولإيجاد المقاييس الاحصائية الوصفية نستخدم الأمر (Descriptives) ومن ثم نحدد أسماء المتغيرات المراد استخدامها لإيجاد المقاييس الاحصائية الوصفية لها وذلك بكتابة العبارة (= Variables) بعد أمر (Deseriptives) وبعدها نكتب أسماء المتغيرات وننهي الأمر بنقطة ونضغط زر الادخال [↵] ليقوم البرنامج بعرض اسم المتغير ، وسطه الحسابي ، انحرافه المعياري(*) ، أصغر قيمة

(*) يحسب الانحراف المعياري هنا من العلاقة $\sqrt{\frac{\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}}{\text{ن} - ١}}$ أي بالقسمة على (ن − ١) بدلاً من (ن) كما ذكرنا في السابق . ويسمى هذا المقياس بتقدير الانحراف المعياري للمجتمع .

فيه ، أكبر قيمة فيه وعدد المشاهدات فيه .

والشكل التالي يمثل ذلك للمتغير (X) في المثال المستخدم :

SPSS/PC : descriptives variables = X

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum	N	Label
X	665.00	15.81	645.00	685.00	5	

وللحصول على المزيد من المقاييس الاحصائية السابقة لنفس المتغير (X) يمكن استخدام الأمر السابق ولكن بإضافة العبارة (/Statistics = all) بعد اسم المتغير (X) وانهاء الأمر بـ (.) وذلك للحصول على المقاييس الآتية :

الخطأ المعياري للمتوسط	S. E. Mean	المتوسط الحسابي	Mean
التـبـايـن	Variance	الانحراف المعياري	Std Dev
الخطأ المعياري لمعامل الالتواء	S. E. Kurt	معامل الالتواء	Kurtosis
الخطأ المعياري لمعامل التفرطح	S. E. Skew	معامل التفرطح	Skewness
أصغر قيمة	Minimum	المدى المطلق	Range
ومجموع قيم المتغير	Sum	أكبر قيمة	Maximum

والشكل التالي يمثل هذه الأوامر كما تظهر على شاشة البرنامج :

SPSS/PC : descriptives variables = x/ statistics = all.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable X

Mean	665.000	S.E. Mean	7.071
Std Dev	15.811	Variance	250.000
Kurtosis	-1.200	S.E. Kurt	2.000
Skewness	0.0	S. E. Skew	.913
Range	40.000	Minimum	645.000
Maximum	685.000	Sum	3325.000

Valid Observations - 5 Missing Observations - 0

بعد ذلك يمكننا إجراء أي نوع من أنواع التحليل الاحصائي على بيانات المثال (٤ ــ ٢) أو انهاء البرنامج وذلك بطباعة الأمر (.Fin) عند عودة البرنامج إلى عرض العبارة (:SPSS/PC) أو أن نكرر الخطوات السابقة في ادخال بيانات جديدة وتعريف المتغيرات فيها وطرق قرائتها والبدء بإجراء التحليل المناسب لها . والشكل التالي يمثل خطوات وأوامر ادخال وتعريف وايجاد مقاييس احصائية وصفية للبيانات في المثال (٥ ــ ٥) .

SPSS/PC : data list free/x.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	5	
CASE	#	1	6	بيانات المثال
CASE	#	2	7	←
CASE	#	3	8	رقم (٥ ــ ٥)
CASE	#	4	9	
CASE	#	5	end data.	

رقم الشاشة

SPSS/PC has written 5 cases to the active file

SPSS/PC : descriptives variables = x.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum	N	label
X	7.00	1.58	5.00	9.00	5	

SPSS/PC : descriptives variables = x/statistics= all.

Number of Valid Observations (Listwise) = 5.00

Variable X

Mean	7.000	S. E. Mean	.707
Std Dev	1.581	Variance	2.500
Kurtosis	-1.200	S. E. Kurt	2.000
Skewness	0.0	S. E. Skew	.913
Range	4.000	Minimum	5.000
Maximum	9.000	Sum	35.000

Valid Observations - 5 Missing Observations - 0

*** تكوين الجداول التكرارية :**

لإيجاد الجدول التكراري والمدرج التكراري لبيانات المثال (٢ ــ ١) نفرض أن بيانات الدرجات للثمانين طالباً قد خلقّت سابقاً ووضعت في ملف اسمه (Grade) فلقراءة درجات الطلاب من الملف (Grade) مستخدمين طريقة القراءة الحرة (Free Format) نستخدم الأمر التالي والذي يعرف الدرجات ويضعها تحت اسم متغير (Grade) في برنامج (SPSS/PC) :

SPSS/PC : data list free file ='grade'/grade.

حيث أن أمر تعريف البيانات والمتغير هو كالأوامر السابقة عدى أننا أضفنا عبارة (File = 'grade') وذلك لاخبار البرنامج أن عليه أن يقرأ البيانات من ملف وليس من لوحة المفاتيح مباشرة .

وللبدء في قراءة البيانات من الملف نكتب الأمر :

```
SPSS/PC : begin data.
```

حيث يقوم البرنامج بعدها بقراءة البيانات :

ولإيجاد القيم التكرارية والمدرج التكراري نستخدم الأمر : (Frequencies) ثم نتبعه بالعبارة (= Variables) والتي نحدد بعدها أسماء المتغيرات المراد اجراء العملية لها وهي في مثالنا المتغير (grade) بعدها يمكن أن ننهي هذا الأمر بوضع نقطة (.) وضغط زر الادخال [↵] لنحصل على القيم التكرارية للبيانات . غير أننا نستطيع الحصول على المدرج التكراري وذلك بكتابة العبارة (Histogram) بعد أسماء المتغيرات ثم نتلوها بتحديد أصغر قيمة (Min) ونضع القيمة بين قوسين « Min (50) » للدلالة على أننا نريد القيمة ٥٠ كأصغر قيمة في المدرج ثم نحدد أكبر قيمة « Max (100) » وهي في حالتنا ١٠٠ ونحدد بعد ذلك طول الفترة وهي ٥ بالعبارة « Inc (5) » وننهي الأمر بالكامل ليصبح كما هو موضح أدناه :

```
SPSS/PC : frequencies variables = grade/histogram min (50) max (100)
        : inc  (5).
```

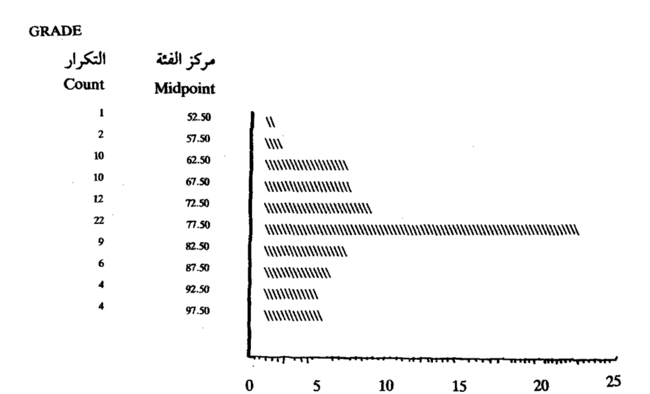
يقوم بعدها البرنامج بعرض القيم التكرارية للبيانات يتلوها المدرج التكراري والذي يظهر التكرارات على المحور الأفقي ومركز الفئة على المحور الرأسي وكذلك التكرارات في كل فئة في العمود الذي يسبق المحور الرأسي في المدرج التكراري كما هو موضح أدناه :

GRADE

VALUE LABEL Value Label

القيمة Value	التكرار Frequency	التكرار النسبي Percent	التكرار النسبي المعتمد Valid Percent	التكرار النسبي(*) المتجمع الصاعد Cum Percent
53.00	1	1.3	1.3	1.3
57.00	1	1.3	1.3	2.5
59.00	1	1.3	1.3	3.8
60.00	3	3.8	3.8	7.5
61.00	2	2.5	2.5	10.0
62.00	3	3.8	3.8	13.8
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
90.00	1	1.3	1.3	91.3
93.00	2	2.5	2.5	93.8
94.00	1	1.3	1.3	95.0
95.00	2	2.5	2.5	97.5
96.00	1	1.3	1.3	98.8
97.00	1	1.3	1.3	100.0
TOTAL	**80**	**100.0**	**100.0**	

(*) التكرار النسبي المعتمد يساوي التكرار مقسوماً على العدد الكلي للتكرارات بعد طرح القيم المفقودة منه .



ويمكن الحصول على المقاييس الاحصائية الوصفية باستخدام الأمر :

SPSS/PC: Descriptives Variables = Grade/ Statistics = All.

أو أن نضيف عبـارة (Statistics = all) إلى أمر (Frequencies) السـابق للحصول على المقاييس أدنـاه في نفس الأمر وبعـد المدرج التكـراري المبين أعلاه ، ليصبح الأمر :

SPSS/PC : Frequencies variable = grade / histogram min (50) Max (100) inc (5)
: /Statistics = all.

حيث يتضـح أننا لم نستـطيع أن نكتب جميـع عبـارات الأمـر في سـطر واحــد لـذلــك فعنــد الانتهــاء من الســطر الأول نضغط زر الادخــال ↵ دون وضـع نقطة (.) في نهـاية السـطر ليفهم البرنـامج بـأننا لم ننته من كتابة الأمر وأننا نحتاج إلى سطر آخر لكتـابته لينتقـل البرنـامج إلى السـطر الثاني بـادئاً بـالرمـز (/) لنكتب العبـارة (/Statistics = all.)

ونهيه بالنقطة دلالة على الانتهاء من الأمر السابق . ومن ثم نحصل على النتائج التالية بالإضافة إلى النتائج السابقة .

GRADE

Mean	75.175	Std Err	1.121	Median	75.000
Mode	75.000	Std Dev	10.026	Variance	100.526
Kurtosis	-.320	S E Kurt	1.978	Skewness	.178
S E Skew	.269	Range	44.000	Minimum	53.000
Maximum	97.000	Sum	6014.000		

ملاحظة :

يظهر ضمن البيانات أعلاه قيمة الوسيط (Median) وقيمة المنوال (Mode) وذلك إذا ما استخدم (/Statistics = all) ضمن أمر (Frequencies) .

* معامل الارتباط الخطي :

لإيجاد معامل ارتباط بيرسون الخطي نستخدم الأمر (Correlations) حيث نحدد المتغيرات لهذا الأمر كالسابق باستخدام العبارة (Variables) والتي نحدد بعدها المتغيرات المراد ايجاد معامل الارتباط الخطي لها في صورة مصفوفة (Matrix) لمعاملات الارتباط كما هي معروضة في برنامج (Microstat) السابق الذكر . والخطوات التالية تمثل خطوات وأوامر ايجاد معامل الارتباط للمتغيرين س ، ص (أو X ، Y) لبيانات المثال (٧ ــ ١) .

```
SPSS/PC : data list free/x y.

SPSS/PC : begin data.

CASE    #  0   1 10
CASE    #  1   5 15
CASE    #  2   9 20        بيانات المثال رقم (٧ ــ ١)
CASE    #  3   13 25
CASE    #  4   17 30
CASE    #  5   end data.
```

SPSS/PC has written 5 cases to the active file

SPSS/PC : correlation variables = x y.

ثم نضغط زر الادخال فنحصل على :

Correlations :	X	Y
X	1.0000	1.0000**
Y	1.0000**	1.0000

← مصفوفة معاملات الارتباط الخطي

N of cases : 5 Significance : * - .01 ** - .001
(.) is printed if a coefficient cannot be computed

والبيانات التالية توضح خطوات ايجاد معامل الارتباط الخطي للمتغيرين (X) ، (Y) في مثال رقم (٧ ــ ٥) .

SPSS/PC : data list free/x y.

SPSS/PC : Begin data.

CASE	#	0	33 18
CASE	#	1	27 20
CASE	#	2	28 22
CASE	#	3	28 27
CASE	#	4	29 21
CASE	#	6	31 27
CASE	#	7	33 29
CASE	#	8	35 28
CASE	#	9	36 29
CASE	#	10	end data.

← بيانات المثال رقم (٧ــ٥)

SPSS/PC has written 10 cases to the active file

SPSS/PC : correlation variables = x y.

ثم نضغط زر الادخال فنحصل على :

Correlations:	X	Y
X	1.000	.4412
Y	.4412	1.0000

N of cases : 10 Significance : * - .01 ** - .001
(.) is printed if a coefficient cannot be computed

*** تحليل الانحدار الخطي :**

بالنسبة لتحليل الانحدار الخطي البسيط والمتعدد فيتم باستعمال الأمر (Regressions) وتحدد المتغيرات باستخدام العبارة (= Variables) ثم ندخل جميع المتغيرات المراد استخدامها في التحليل ثم نحدد المتغير التابع (Dependent Variable)وذلك باستخدام العبارة (= Dependent/) ونحدد بعدها اسم المتغير التابع حيث يجب أن يكون ضمن المتغيرات المحددة في العبارة (= Variables) السابقة ثم نحدد بعد ذلك طريقة تكوين النموذج الخطي ضمن الطرق المعروفة في تحليل الانحدار وما يهمنا في هذا الكتاب هي طريقة واحدة فقط والتي تستخدم جميع المتغيرات المستقلة (Independent Variables) حيث نحددها باستخدام العبارة (Method = Enter/), يتبعها أسماء المتغيرات المستقلة المستخدمة في نموذج الانحدار الخطي حيث يجب أن تكون هذه المتغيرات ضمن المتغيرات المذكورة في العبارة (= Variables) وبذلك فإن أمر الانحدار الخطي للمتغير (ص) على (س) (Y على X) للمثال رقم (٨ ــ ١) هو كما يلي :

SPSS/PC : regression variables = x y/dependent = y/ method = enter x.

والشكل التالي يوضح جميع خطوات تعريف وادخال بيانات المثال رقم (٨ ـ ١) وكذلك نتائج الارتباط الخطي البسيط بين (Y) و (X) وكذلك نتائج أمر الانحدار الخطي البسيط بين (Y) و (X) والتي تأخذ الصورة الخطية :

ضَ = أ + ب س

أو

$\hat{Y} = a + bX$

SPSS/PC : data list free/ x y.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	11 19
CASE	#	1	7 11
CASE	#	2	15 16
CASE	#	3	9 15
CASE	#	4	6 10
CASE	#	5	8 8
CASE	#	6	9 7
CASE	#	7	9 12
CASE	#	8	13 15
CASE	#	9	13 17
CASE	#	10	end data.

← بيانات المثال رقم (٨ ـ ١)

SPSS/PC has written 10 cases to the active file

This procedure was completed at 21 :55:35

SPSS/PC : coreelation variables = x y.

فنحصل بذلك على معامل الارتباط فقط على النحو التالي :

Correlations:	X	Y
X	1.0000	.6882
Y	.6882	1.0000

← مصفوفة معاملات الارتباط الخطي

N of cases : 10 Significance: * - .01 ** - .001

(.) is printed if a coefficient cannot be computed

أما إذا أردنا تقدير نموذج الانحدار الخطي نستخدم المنهج التالي :

SPSS/Pc : Regressions Variables = x y / dependent = y/method = enter x.

MULTIPLE REGRESSION

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1 Dependent Variable.. Y
Beginning Block Number 1. Method: Enter X

MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variable(s) Entered on Step Number
1.. X

Multiple R	.68825	← معامل الارتباط الكلي
R Square	.47368	← معامل التحديد ($ر^2$)
Adjusted R Square	.40789	
Standard Error	3.07794	

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	68.21053	68.21053
Residual	8	75.78947	9.47368

F = 7.20000 Signif F = 0278

MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variables in the Equation

Variable	B		SE B	Beta	T	Sig T
X	.94737	(ب)	.35306	.68825	2.683	.0278
(Constant)	3.52632	(أ)	3.66234		.963	.3638

End Block Number 1 All requested variables entered.

This procedure was completed at 22: 09: 43

حيث : أ = ٣,٥٢٦٣٢ والخطأ المعياري لـ أ = ٣,٦٦٢٣٤

ب = ٠,٩٤٧٤٧ والخطأ المعياري لـ ب = ٠,٣٥٣٠٦

وعليه فإن معادلة الانحدار الخطي البسيط تصبح :

ضَ = ٣,٥٢٦٣٢ + ٩٤٧٤٧, س

أما النموذج الخطي المتعدد للمثال (٨ ــ ٦) والمكون من ثلاثة متغيرات ص، س١ ، س٢ (أو Y ، X_1 ، X_2) حيث قدرنا معادلة خط انحدار (ص) على كل من س١ ، س٢ بالمعادلة :

ضَ = أ + ب١ س١ + ب٢ س٢

أو النموذج : $\hat{Y} = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

فيمكن ادخال بيانات هذا النموذج وتقديره بالخطوات التالية والتي تظهر المتغير (Y) كمتغير تابع والمتغيرين X_1 و X_2 كمتغيرين مستقلين :

SPSS/PC : data list free/y x1 x2.

SPSS/PC : begin data.

CASE	#	0	6 7 23
CASE	#	1	4 5 22
CASE	#	2	10 9 19
CASE	#	3	9 10 24
CASE	#	5	5 7 25
CASE	#	6	2 4 22
CASE	#	7	8 8 19
CASE	#	8	4 2 24
CASE	#	9	10 9 21
CASE	#	10	end data.

بيانات المتغيرات الثلاثة في المثال (٨ ــ ٦)

SPSS/PC has written 10 cases to the active file

إذا أردنا حساب معاملات الارتباط بين المتغيرات الثلاثة نستخدم المنهج التالي :

SPSS/PC : correlation variables = y x1 x2.

Correlationx:	Y	X1	X2	مصفوفة معاملات
Y	1.0000	.8730**	-.4674	
X1	.8730**	1.0000	-.3252	الارتباط الخطي
X2	-.4674	-.3252	1.0000	

N of cases : 10 Significance: * - .01 ** - .001

(.) is printed if a coefficient cannot be computed

أما إذا أردنا تقدير معادلة خط الانحدار المتعدد نستخدم المنهج التالي :

SPSS/PC : regression variables = y x1 x2/dependent / y/method = enter x1 x2.

ثم نضغط زر الادخال فنحصل على النتائج المتالية :

MULTIPLE REGRESSION

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1 Dependent Variable.. Y
Beginning Block Number 1. Method: Enter X1 X2

MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variable(s) Entered on Step Number
1.. X2
2.. X1

Multiple R	.89428	معامل الارتباط الكلي
R Square	.79974	معامل التحديد
Adjusted R Square	.74252	
Standard Error	1.39989	

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	54.78212	27.39106
Residual	7	13.71788	1.95970

F = 13.97718 Signif F = .0036

MULTIPLE REGRESSION

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Variables in the Equation

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X2	-.27967	.24370	-.20526	-1.148	.2888
X1	.88459	.19625	.80622	4.507	.0028
(Constant)	6.57696	5.98148		1.100	.3079

End Block Number 1 All requested variables entered.

This procedure was completed at 22 : 14 : 06

حيث :

أ = ٦,٥٧٦٩٦

ب$_{١}$ = ٠,٨٨٤٥٩ الخطأ المعياري لـ ب$_{١}$ = ٠,١٩٦٢٥

ب$_{٢}$ = -٠,٢٧٩٦٧ الخطأ المعياري لـ ب$_{٢}$ = ٠,٢٤٣٧٠

ومن ثم فإن معادلة خط انحدار (ص) على (س$_{١}$ ، س$_{٢}$) تؤول إلى :

ص = ٦,٥٧٦٩٦ + ٠,٨٨٤٥٩ س$_{١}$ - ٠,٢٧٩٦٧ س$_{٢}$

بعد اجراء جميع التحليلات الاحصائية المطلوبة يمكن انهاء برنامج (SPSS/PC +) وذلك باستخدام أمر الانهاء (Fin.) كما هو موضح أدناه :

SPSS/PC : Fin.

End of session. Please rememner your KEY DISKETTE.

العرض السابق لبعض استخدامات برنامج (SPSS/PC+) على جهاز شخص من نوع (IBM-PC) ، غير أنه يمكن استخدام البرنامج السابق في عمليات احصائية أخرى مثل تحليل السلاسل الزمنية واختبارات الفروض الاحصائية وتحليل التباين وغيرها من الأساليب الاحصائية المعروفة . كذلك

يمكن استخدام برنامج (SPSS) بسهولة أيضاً على الحاسبات الكبيرة (Main Frames) .

يتضح من عرضنا في هذا الفصل لنوعين من البرامج الجاهزة سهولة استخدام هذه البرامج في تحليل البيانات الاحصائية إلاّ أننا يجب علينا التأكيد على أهمية استشارة المتخصصين في الاحصاء وذلك لاختيار المنهج المناسب في التحليل وتفسير النتائج التي نحصل عليها .

ملحـــق

الجـــداول الاحصائيـــة

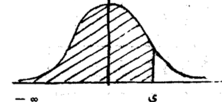
جـــدول ١١

جدول مساحات المنحنى الطبيعى المعيارى

ى	٠ر٠٠	٠ر٠١	٠ر٠٢	٠ر٠٣	٠ر٠٤	٠ر٠٥	٠ر٠٦	٠ر٠٧	٠ر٠٨	٠ر٠٩
٠ر٠	٠ر٥٠٠٠	٠ر٥٠٤٠	٠ر٥٠٨٠	٠ر٥١٢٠	٠ر٥١٥٩	٠ر٥١٩٩	٠ر٥٢٣٩	٠ر٥٢٧٩	٠ر٥٣١٩	٠ر٥٣٥٩
٠ر١	٠ر٥٣٩٨	٠ر٥٤٣٨	٠ر٥٤٧٨	٠ر٥٥١٧	٠ر٥٥٥٧	٠ر٥٥٩٦	٠ر٥٦٣٦	٠ر٥٦٧٥	٠ر٥٧١٤	٠ر٥٧٥٣
٠ر٢	٠ر٥٧٩٣	٠ر٥٨٣٢	٠ر٥٨٧١	٠ر٥٩١٠	٠ر٥٩٤٨	٠ر٥٩٨٧	٠ر٦٠٢٦	٠ر٦٠٦٤	٠ر٦١٠٣	٠ر٦١٤١
٠ر٣	٠ر٦١٧٩	٠ر٦٢١٧	٠ر٦٢٥٥	٠ر٦٢٩٣	٠ر٦٣٣١	٠ر٦٣٦٨	٠ر٦٤٠٦	٠ر٦٤٤٣	٠ر٦٤٨٠	٠ر٦٥١٧
٠ر٤	٠ر٦٥٥٤	٠ر٦٥٩١	٠ر٦٦٢٨	٠ر٦٦٦٤	٠ر٦٧٠٠	٠ر٦٧٣٦	٠ر٦٧٧٢	٠ر٦٨٠٨	٠ر٦٨٤٤	٠ر٦٨٧٩
٠ر٥	٠ر٦٩١٥	٠ر٦٩٥٠	٠ر٦٩٨٥	٠ر٧٠١٩	٠ر٧٠٥٤	٠ر٧٠٨٨	٠ر٧١٢٣	٠ر٧١٥٧	٠ر٧١٩٠	٠ر٧٢٢٤
٠ر٦	٠ر٧٢٥٧	٠ر٧٢٩١	٠ر٧٣٢٤	٠ر٧٣٥٧	٠ر٧٣٨٩	٠ر٧٤٢٢	٠ر٧٤٥٤	٠ر٧٤٨٦	٠ر٧٥١٨	٠ر٧٥٤٩
٠ر٧	٠ر٧٥٨٠	٠ر٧٦١٢	٠ر٧٦٤٢	٠ر٧٦٧٣	٠ر٧٧٠٤	٠ر٧٧٣٤	٠ر٧٧٦٤	٠ر٧٧٩٤	٠ر٧٨٢٣	٠ر٧٨٥٢
٠ر٨	٠ر٧٨٨١	٠ر٧٩١٠	٠ر٧٩٣٩	٠ر٧٩٦٧	٠ر٧٩٩٥	٠ر٨٠٢٣	٠ر٨٠٥١	٠ر٨٠٧٨	٠ر٨١٠٦	٠ر٨١٣٣
٠ر٩	٠ر٨١٥٩	٠ر٨١٨٦	٠ر٨٢١٢	٠ر٨٢٣٨	٠ر٨٢٦٤	٠ر٨٢٨٩	٠ر٨٣١٥	٠ر٨٣٤٠	٠ر٨٣٦٥	٠ر٨٣٨٩
١ر٠	٠ر٨٤١٣	٠ر٨٤٣٨	٠ر٨٤٦١	٠ر٨٤٨٥	٠ر٨٥٠٨	٠ر٨٥٣١	٠ر٨٥٥٤	٠ر٨٥٧٧	٠ر٨٥٩٩	٠ر٨٦٢١
١ر١	٠ر٨٦٤٣	٠ر٨٦٦٥	٠ر٨٦٨٦	٠ر٨٧١٨	٠ر٨٧٣٩	٠ر٨٧٤٩	٠ر٨٧٧٠	٠ر٨٧٩٠	٠ر٨٨١٠	٠ر٨٨٣٠
١ر٢	٠ر٨٨٤٩	٠ر٨٨٦٩	٠ر٨٨٨٨	٠ر٨٩٠٧	٠ر٨٩٢٥	٠ر٨٩٤٤	٠ر٨٩٦٢	٠ر٨٩٨٠	٠ر٨٩٩٧	٠ر٩٠١٥
١ر٣	٠ر٩٠٣٢	٠ر٩٠٤٩	٠ر٩٠٦٦	٠ر٩٠٨٣	٠ر٩٠٩٩	٠ر٩١١٥	٠ر٩١٣١	٠ر٩١٤٧	٠ر٩١٦٢	٠ر٩١٧٧
١ر٤	٠ر٩١٩٢	٠ر٩٢٠٧	٠ر٩٢٢٢	٠ر٩٢٣٦	٠ر٩٢٥١	٠ر٩٢٦٥	٠ر٩٢٧٩	٠ر٩٢٩٢	٠ر٩٣٠٦	٠ر٩٣١٩
١ر٥	٠ر٩٣٣٢	٠ر٩٣٤٥	٠ر٩٣٥٧	٠ر٩٣٧٠	٠ر٩٣٨٢	٠ر٩٣٩٤	٠ر٩٤٠٦	٠ر٩٤١٨	٠ر٩٤٣٠	٠ر٩٤٤١
١ر٦	٠ر٩٤٥٢	٠ر٩٤٦٣	٠ر٩٤٧٤	٠ر٩٤٨٥	٠ر٩٤٩٥	٠ر٩٥٠٥	٠ر٩٥١٥	٠ر٩٥٢٥	٠ر٩٥٣٥	٠ر٩٥٤٥
١ر٧	٠ر٩٥٥٤	٠ر٩٥٦٤	٠ر٩٥٧٣	٠ر٩٥٨٢	٠ر٩٥٩١	٠ر٩٥٩٩	٠ر٩٦٠٨	٠ر٩٦١٦	٠ر٩٦٢٥	٠ر٩٦٣٣
١ر٨	٠ر٩٦٤١	٠ر٩٦٤٩	٠ر٩٦٥٦	٠ر٩٦٦٤	٠ر٩٦٧١	٠ر٩٦٧٨	٠ر٩٦٨٦	٠ر٩٦٩٣	٠ر٩٦٩٩	٠ر٩٧٠٦
١ر٩	٠ر٩٧١٣	٠ر٩٧١٩	٠ر٩٧٢٦	٠ر٩٧٣٢	٠ر٩٧٣٨	٠ر٩٧٤٤	٠ر٩٧٥٠	٠ر٩٧٥٨	٠ر٩٧٦٢	٠ر٩٧٦٧
٢ر٠	٠ر٩٧٧٢	٠ر٩٧٧٨	٠ر٩٧٨٣	٠ر٩٧٨٨	٠ر٩٧٩٣	٠ر٩٧٩٨	٠ر٩٨٠٣	٠ر٩٨٠٨	٠ر٩٨١٢	٠ر٩٨١٧
٢ر١	٠ر٩٨٢١	٠ر٩٨٢٦	٠ر٩٨٣٠	٠ر٩٨٣٤	٠ر٩٨٣٨	٠ر٩٨٤٢	٠ر٩٨٤٦	٠ر٩٨٥٠	٠ر٩٨٥٤	٠ر٩٨٥٧
٢ر٢	٠ر٩٨٦١	٠ر٩٨٦٥	٠ر٩٨٦٨	٠ر٩٨٧١	٠ر٩٨٧٥	٠ر٩٨٧٨	٠ر٩٨٨١	٠ر٩٨٨٤	٠ر٩٨٨٧	٠ر٩٨٩٠
٢ر٣	٠ر٩٨٩٣	٠ر٩٨٩٦	٠ر٩٨٩٨	٠ر٩٩٠١	٠ر٩٩٠٤	٠ر٩٩٠٦	٠ر٩٩٠٩	٠ر٩٩١١	٠ر٩٩١٣	٠ر٩٩١٦
٢ر٤	٠ر٩٩١٨	٠ر٩٩٢٠	٠ر٩٩٢٢	٠ر٩٩٢٥	٠ر٩٩٢٧	٠ر٩٩٢٩	٠ر٩٩٣١	٠ر٩٩٣٢	٠ر٩٩٣٤	٠ر٩٩٣٦
٢ر٥	٠ر٩٩٣٨	٠ر٩٩٤٠	٠ر٩٩٤١	٠ر٩٩٤٣	٠ر٩٩٤٥	٠ر٩٩٤٦	٠ر٩٩٤٨	٠ر٩٩٤٩	٠ر٩٩٥١	٠ر٩٩٥٢
٢ر٦	٠ر٩٩٥٣	٠ر٩٩٥٥	٠ر٩٩٥٦	٠ر٩٩٥٧	٠ر٩٩٥٩	٠ر٩٩٦٠	٠ر٩٩٦١	٠ر٩٩٦٢	٠ر٩٩٦٣	٠ر٩٩٦٤
٢ر٧	٠ر٩٩٦٥	٠ر٩٩٦٦	٠ر٩٩٦٧	٠ر٩٩٦٨	٠ر٩٩٦٩	٠ر٩٩٧٠	٠ر٩٩٧١	٠ر٩٩٧٢	٠ر٩٩٧٣	٠ر٩٩٧٤
٢ر٨	٠ر٩٩٧٤	٠ر٩٩٧٥	٠ر٩٩٧٦	٠ر٩٩٧٧	٠ر٩٩٧٧	٠ر٩٩٧٨	٠ر٩٩٧٩	٠ر٩٩٨٠	٠ر٩٩٨٠	٠ر٩٩٨١
٢ر٩	٠ر٩٩٨١	٠ر٩٩٨٢	٠ر٩٩٨٣	٠ر٩٩٨٤	٠ر٩٩٨٤	٠ر٩٩٨٤	٠ر٩٩٨٥	٠ر٩٩٨٥	٠ر٩٩٨٦	٠ر٩٩٨٦
٣ر٠	٠ر٩٩٨٦	٠ر٩٩٨٧	٠ر٩٩٨٧	٠ر٩٩٨٨	٠ر٩٩٨٨	٠ر٩٩٨٨	٠ر٩٩٨٩	٠ر٩٩٨٩	٠ر٩٩٨٩	٠ر٩٩٩٠

ملاحظـــة :

الجدول أعلاه يعطى المساحة المظللة تحت منحنى التوزيع المعتاد المعيارى مابين القيمة ∞ والقيمة ى .



جـــــــدول (٢)

جدول توزيع مربع كاى (لـيم مم = كا^{2} (ن ، α))

درجات الحرية ن / المساحة α	٠ر٩٩٥	٠ر٩٩٠	٠ر٩٧٥	٠ر٩٥٠	٠ر٩٠٠	٠ر٧٥٠	٠ر٢٥٠	٠ر١٠٠	٠ر٠٥٠	٠ر٠٢٥	٠ر٠١٠	٠ر٠٠٥
١	٠ر٠٠٠٠٣٩٣	٠ر٠٠٠١٥٧	٠ر٠٠٠٩٨٢	٠ر٠٠٣٩٣	٠ر٠١٥٨	٠ر١٠٢	١ر٣٢	٢ر٧١	٣ر٨٤	٥ر٠٢	٦ر٦٣	٧ر٨٨
٢	ر٠١٠٠	٠ر٠٢٠١	٠ر٠٥٠٦	٠ر١٠٣	٠ر٢١١	٠ر٥٧٥	٢ر٧٧	٤ر٦١	٥ر٩٩	٧ر٣٨	٩ر٢١	١٠ر٦٠
٣	٠ر٠٧١٧	٠ر١١٥	٠ر٢١٦	٠ر٣٥٢	٠ر٥٨٤	١ر٢١	٤ر١١	٦ر٢٥	٧ر٨١	٩ر٣٥	١١ر٣٠	١٢ر٨٠
٤	٠ر٢٠٧	٠ر٢٩٧	٠ر٤٨٤	٠ر٧١١	١ر٠٦	١ر٩٢	٥ر٣٩	٧ر٧٨	٩ر٤٩	١١ر١٠	١٣ر٣٠	١٤ر٩٠
٥	٠ر٤١٢	٠ر٥٥٤	٠ر٨٣١	١ر١٥	١ر٦١	٢ر٦٧	٦ر٦٣	٩ر٢٤	١١ر١٠	١٢ر٨٠	١٥ر١٠	١٦ر٧٠
٦	٠ر٦٧٦	٠ر٨٧٢	١ر٢٤	١ر٦٤	٢ر٢٠	٣ر٤٥	٧ر٨٤	١٠ر٦٠	١٢ر٦٠	١٤ر٤٠	١٦ر٨٠	١٨ر٥٠
٧	٠ر٩٨٩	١ر٢٤	١ر٦٩	٢ر١٧	٢ر٨٣	٤ر٢٥	٩ر٠٤	١٢ر٠٠	١٤ر١٠	١٦ر٠٠	١٨ر٥٠	٢٠ر٣٠
٨	١ر٣٤	١ر٦٥	٢ر١٨	٢ر٧٣	٣ر٤٩	٥ر٠٧	١٠ر٢٠	١٣ر٤٠	١٥ر٥٠	١٧ر٥٠	٢٠ر١٠	٢٢ر٠٠
٩	١ر٧٣	٢ر٠٩	٢ر٧٠	٣ر٣٣	٤ر١٧	٥ر٩٠	١١ر٤٠	١٤ر٧٠	١٦ر٩٠	١٩ر٠٠	٢١ر٧٠	٢٣ر٦٠
١٠	٢ر١٦	٢ر٥٦	٣ر٢٥	٣ر٩٤	٤ر٨٧	٦ر٧٤	١٢ر٥٠	١٦ر٠٠	١٨ر٣٠	٢٠ر٥٠	٢٣ر٢٠	٢٥ر٢٠
١١	٢ر٦٠	٣ر٠٥	٣ر٨٢	٤ر٥٧	٥ر٥٨	٧ر٥٨	١٣ر٧٠	١٧ر٣٠	١٩ر٧٠	٢١ر٩٠	٢٤ر٧٠	٢٦ر٨٠
١٢	٣ر٠٧	٣ر٥٧	٤ر٤٠	٥ر٢٣	٦ر٣٠	٨ر٤٤	١٤ر٨٠	١٨ر٥٠	٢١ر٠٠	٢٣ر٣٠	٢٦ر٢٠	٢٨ر٣٠
١٣	٣ر٥٧	٤ر١١	٥ر٠١	٥ر٨٩	٧ر٠٤	٩ر٣٠	١٦ر٠٠	١٩ر٨٠	٢٢ر٤٠	٢٤ر٧٠	٢٧ر٧٠	٢٩ر٨٠
١٤	٤ر٠٧	٤ر٦٦	٥ر٦٣	٦ر٥٧	٧ر٧٩	١٠ر٢٠	١٧ر١٠	٢١ر١٠	٢٣ر٧٠	٢٦ر١٠	٢٩ر١٠	٣١ر٣٠
١٥	٤ر٦٠	٥ر٢٣	٦ر٢٦	٧ر٢٦	٨ر٥٥	١١ر٠٠	١٨ر٢٠	٢٢ر٣٠	٢٥ر٠٠	٢٧ر٥٠	٣٠ر٦٠	٣٢ر٨٠
١٦	٥ر١٤	٥ر٨١	٦ر٩١	٧ر٩٦	٩ر٣١	١١ر٩٠	١٩ر٤٠	٢٣ر٥٠	٢٦ر٣٠	٢٨ر٨٠	٣٢ر٠٠	٣٤ر٣٠
١٧	٥ر٧٠	٦ر٤١	٧ر٥٦	٨ر٦٧	١٠ر١٠	١٢ر٨٠	٢٠ر٥٠	٢٤ر٨٠	٢٧ر٦٠	٣٠ر٢٠	٣٣ر٤٠	٣٥ر٧٠

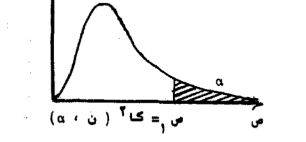
تابع جدول (٢)

جدول توزيع مربع كاى

درجات الحرية ن / المساحة α	٠ر٩٩٥	٠ر٩٩٠	٠ر٩٧٥	٠ر٩٥٠	٠ر٩٠٠	٠ر٧٥٠	٠ر٢٥٠	٠ر١٠٠	٠ر٠٥٠	٠ر٠٢٥	٠ر٠١٠	٠ر٠٠٥
١٨	٦ر٢٦	٧ر٠١	٨ر٢٣	٩ر٣٩	١٠ر٩٠	١٣ر٧٠	٢١ر٦٠	٢٦ر٠٠	٢٨ر٩٠	٣١ر٥٠	٣٤ر٨٠	٣٧ر٢٠
١٩	٦ر٨٤	٧ر٦٣	٨ر٩١	١٠ر١٠	١١ر٧٠	١٤ر٦٠	٢٢ر٧٠	٢٧ر٢٠	٣٠ر١٠	٣٢ر٩٠	٣٦ر٢٠	٣٨ر٦٠
٢٠	٧ر٤٣	٨ر٢٦	٩ر٥٩	١٠ر٩٠	١٢ر٤٠	١٥ر٥٠	٢٣ر٨٠	٢٨ر٤٠	٣١ر٤٠	٣٤ر٢٠	٣٧ر٦٠	٤٠ر٠٠
٢١	٨ر٠٣	٨ر٩٠	١٠ر٣٠	١١ر٦٠	١٣ر٢٠	١٦ر٣٠	٢٤ر٩٠	٢٩ر٦٠	٣٢ر٧٠	٣٥ر٥٠	٣٨ر٩٠	٤١ر٤٠
٢٢	٨ر٦٤	٩ر٥٤	١١ر٠٠	١٢ر٣٠	١٤ر٠٠	١٧ر٢٠	٢٦ر٠٠	٣٠ر٨٠	٣٣ر٩٠	٣٦ر٩٠	٤٠ر٣٠	٤٢ر٨٠
٢٣	٩ر٢٦	١٠ر٢٠	١١ر٧٠	١٣ر١٠	١٤ر٨٠	١٨ر١٠	٢٧ر١٠	٣٢ر٠٠	٣٥ر٢٠	٣٨ر١٠	٤١ر٦٠	٤٤ر٢٠
٢٤	٩ر٨٩	١٠ر٩٠	١٢ر٤٠	١٣ر٨٠	١٥ر٧٠	١٩ر٠٠	٢٨ر٢٠	٣٣ر٢٠	٣٦ر٤٢	٣٩ر٤٠	٤٣ر٠٠	٤٥ر٥٦
٢٥	١٠ر٥٠	١١ر٥٠	١٣ر١٠	١٤ر٦٠	١٦ر٥٠	١٩ر٩٠	٢٩ر٣٠	٣٤ر٤٠	٣٧ر٧٠	٤٠ر٦٠	٤٤ر٣٠	٤٦ر٩٠
٢٦	١١ر٢٠	١٢ر٢٠	١٣ر٨٠	١٥ر٤٠	١٧ر٣٠	٢٠ر٨٠	٣٠ر٤٠	٣٥ر٦٠	٣٨ر٩٠	٤١ر٩٠	٤٥ر٦٠	٤٨ر٣٠
٢٧	١١ر٨٠	١٢ر٩٠	١٤ر٦٠	١٦ر٢٠	١٨ر١٠	٢١ر٧٠	٣١ر٥٠	٣٦ر٧٠	٤٠ر١٠	٤٣ر٢٠	٤٧ر٠٠	٤٩ر٦٠
٢٨	١٢ر٥٠	١٣ر٦٠	١٥ر٣٠	١٦ر٩٠	١٨ر٩٠	٢٢ر٧٠	٣٢ر٦٠	٣٧ر٩٠	٤١ر٣٠	٤٤ر٥٠	٤٨ر٣٠	٥١ر٠٠
٢٩	١٣ر١٠	١٤ر٣٠	١٦ر٠٠	١٧ر٧٠	١٩ر٨٠	٢٣ر٦٠	٣٣ر٧٠	٣٩ر١٠	٤٢ر٦٠	٤٥ر٧٠	٤٩ر٦٠	٥٢ر٣٠
٣٠	١٣ر٨٠	١٥ر٠٠	١٦ر٨٠	١٨ر٥٠	٢٠ر٦٠	٢٤ر٥٠	٣٤ر٨٠	٤٠ر٣٠	٤٣ر٨٠	٤٧ر٠٠	٥٠ر٩٠	٥٣ر٧٠

ملاحظة :

الجدول أعلاه يعطى قيمة كا٢ المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها α.



جـــــدول (٣)

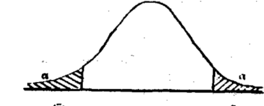
جـــــدول تـوزيـــــع

درجات الحرية ن	٠٫٦٠	٠٫٧٠	٠٫٨٠	٠٫٩٠	٠٫٩٥	٠٫٩٧٥	٠٫٩٩	٠٫٩٩٥
١	٠٫٣٢٥	٠٫٧٢٧	١٫٣٧٦	٣٫٠٧٨	٦٫٣١٤	١٢٫٧٠٦	٣١٫٨٢١	٦٣٫٦٥٧
٢	٠٫٢٨٩	٠٫٦١٧	١٫٠٦١	١٫٨٨٦	٢٫٩٢٠	٤٫٣٠٣	٦٫٩٦٥	٩٫٩٢٥
٣	٠٫١٧٧	٠٫٥٨٤	٠٫٩٧٨	١٫٦٣٨	٢٫٣٥٣	٣٫١٨٢	٤٫٥٤١	٥٫٨٤١
٤	٠٫٢٧١	٠٫٥٦٩	٠٫٩٤١	١٫٥٣٣	٢٫١٣٢	٢٫٧٧٦	٣٫٧٤٧	٤٫٦٠٤
٥	٠٫٢٦٧	٠٫٥٥٩	٠٫٩٢٠	١٫٤٧٦	٢٫٠١٥	٢٫٥٧١	٣٫٣٦٥	٤٫٠٣٢
٦	٠٫٢٦٥	٠٫٥٥٣	٠٫٩٠٦	١٫٤٤٠	١٫٩٤٣	٢٫٤٤٧	٣٫١٤٣	٣٫٧٠٧
٧	٠٫٢٦٣	٠٫٥٤٩	٠٫٨٩٦	١٫٤١٥	١٫٨٩٥	٢٫٣٦٥	٢٫٩٩٨	٣٫٤٩٩
٨	٠٫٢٦٢	٠٫٥٤٦	٠٫٨٨٩	١٫٣٩٧	١٫٨٦٠	٢٫٣٠٦	٢٫٨٩٦	٣٫٣٥٥
٩	٠٫٢٦١	٠٫٥٤٣	٠٫٨٨٣	١٫٣٨٣	١٫٨٣٣	٢٫٢٦٢	٢٫٨٢١	٣٫٢٥٠
١٠	٠٫٢٦٠	٠٫٥٤٢	٠٫٨٧٩	١٫٣٧٢	١٫٨١٢	٢٫٢٢٨	٢٫٧٦٤	٣٫١٦٩
١١	٠٫٢٦٠	٠٫٥٤٠	٠٫٨٧٦	١٫٣٦٣	١٫٧٩٦	٢٫٢٠١	٢٫٧١٨	٣٫١٠٦
١٢	٠٫٢٥٩	٠٫٥٣٩	٠٫٨٧٣	١٫٣٥٦	١٫٧٨٢	٢٫١٧٩	٢٫٦٨١	٣٫٠٥٥
١٣	٠٫٢٥٩	٠٫٥٣٨	٠٫٨٧٠	١٫٣٥٠	١٫٧٧١	٢٫١٦٠	٢٫٦٥٠	٣٫٠١٢
١٤	٠٫٢٥٨	٠٫٥٣٧	٠٫٨٦٨	١٫٣٤٥	١٫٧٦١	٢٫١٤٥	٢٫٦٢٤	٢٫٩٧٧
١٥	٠٫٢٥٨	٠٫٥٣٦	٠٫٨٦٦	١٫٣٤١	١٫٧٥٣	٢٫١٣١	٢٫٦٠٢	٢٫٩٤٧
١٦	٠٫٢٥٨	٠٫٥٣٥	٠٫٨٦٥	١٫٣٣٧	١٫٧٤٦	٢٫١٢٠	٢٫٥٨٣	٢٫٩٢١
١٧	٠٫٢٥٧	٠٫٥٣٤	٠٫٨٦٣	١٫٣٣٣	١٫٧٤٠	٢٫١١٠	٢٫٥٦٧	٢٫٨٩٨
١٨	٠٫٢٥٧	٠٫٥٣٤	٠٫٨٦٢	١٫٣٣٠	١٫٧٣٤	٢٫١٠١	٢٫٥٥٢	٢٫٨٧٨
١٩	٠٫٢٥٧	٠٫٥٣٣	٠٫٨٦١	١٫٣٢٨	١٫٧٢٩	٢٫٠٩٣	٢٫٥٣٩	٢٫٨٦١
٢٠	٠٫٢٥٧	٠٫٥٣٣	٠٫٨٦٠	١٫٣٢٥	١٫٧٢٥	٢٫٠٨٦	٢٫٥٢٨	٢٫٨٤٥
٢١	٠٫٢٥٧	٠٫٥٣٢	٠٫٨٥٩	١٫٣٢٣	١٫٧٢١	٢٫٠٨٠	٢٫٥١٨	٢٫٨٣١
٢٢	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣٢	٠٫٨٥٨	١٫٣٢١	١٫٧١٧	٢٫٠٧٤	٢٫٥٠٨	٢٫٨١٩
٢٣	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣٢	٠٫٨٥٨	١٫٣١٩	١٫٧١٤	٢٫٠٦٩	٢٫٥٠٠	٢٫٨٠٧
٢٤	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣١	٠٫٨٥٧	١٫٣١٨	١٫٧١١	٢٫٠٦٤	٢٫٤٩٢	٢٫٧٨٧
٢٥	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣١	٠٫٨٥٦	١٫٣١٦	١٫٧٠٨	٢٫٠٦٠	٢٫٤٨٥	٢٫٧٨٧
٢٦	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣١	٠٫٨٥٦	١٫٣١٥	١٫٧٠٦	٢٫٠٥٦	٢٫٤٧٩	٢٫٧٧٩
٢٧	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣١	٠٫٨٥٥	١٫٣١٤	١٫٧٠٣	٢٫٠٥٢	٢٫٤٧٣	٢٫٧٧١
٢٨	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣٠	٠٫٨٥٥	١٫٣١٣	١٫٧٠١	٢٫٠٤٨	٢٫٤٦٧	٢٫٧٦٣
٢٩	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣٠	٠٫٨٥٤	١٫٣١١	١٫٦٩٩	٢٫٠٤٥	٢٫٤٦٢	٢٫٧٥٦
٣٠	٠٫٢٥٦	٠٫٥٣٠	٠٫٨٥٤	١٫٣١٠	١٫٦٩٧	٢٫٠٤٢	٢٫٤٥٧	٢٫٧٥٠
٤٠	٠٫٢٥٥	٠٫٥٢٩	٠٫٨٥١	١٫٣٠٣	١٫٦٨٤	٢٫٠٢١	٢٫٤٢٣	٢٫٧٠٤
٦٠	٠٫٢٥٤	٠٫٥٢٧	٠٫٨٤٨	١٫٢٩٦	١٫٦٧١	٢٫٠٠٠	٢٫٣٩٠	٢٫٦٦٠
١٢٠	٠٫٢٥٤	٠٫٥٢٦	٠٫٨٤٥	١٫٢٨٩	١٫٦٥٨	١٫٩٨٠	٢٫٣٥٨	٢٫٦١٧
	٠٫٢٥٣	٠٫٥٢٤	٠٫٨٤٢	١٫٢٨٢	١٫٦٤٥	١٫٩٦٠	٢٫٣٢٦	٢٫٥٧٦

ملاحظة :

الجدول أعلاه يعطى قيمة ت

المقابلة للمساحة المظللة α .



جـــــــدول (٤)

جـــــــدول توزيع ف (مستـــــوى المعنويـــة = ٠٥ر)

ن١ / ن٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٦٠	١٢٠	∞
١	١٦١ر٤٠	١٩٩ر٥	٢١٥ر٧	٢٢٤ر٦	٢٣٠ر٢	٢٣٤ر٠٠	٢٣٦ر٨	٢٣٨ر٩	٢٤٠ر٥	٢٤١ر٩	٢٤٣ر٩	٢٤٥ر٩	٢٤٨ر٠٠	٢٤٩ر١	٢٥٠ر١	٢٥١ر١	٢٥٢ر٢	٢٥٣ر٣	٢٥٤ر٣
٢	١٨ر٥١	١٩ر٠٠	١٩ر١٦	١٩ر٢٥	١٩ر٣٠	١٩ر٣٣	١٩ر٣٥	١٩ر٣٧	١٩ر٣٨	١٩ر٤٠	١٩ر٤١	١٩ر٤٣	١٩ر٤٥	١٩ر٤٥	١٩ر٤٦	١٩ر٤٧	١٩ر٤٨	١٩ر٤٩	١٩ر٥٠
٣	١٠ر١٣	٩ر٥٥	٩ر٢٨	٩ر١٢	٩ر٠١	٨ر٩٤	٨ر٨٩	٨ر٨٥	٨ر٨١	٨ر٧٩	٨ر٧٤	٨ر٧٠	٨ر٦٦	٨ر٦٤	٨ر٦٢	٨ر٥٩	٨ر٥٧	٨ر٥٥	٨ر٥٣
٤	٧ر٧١	٦ر٩٤	٦ر٥٩	٦ر٣٩	٦ر٢٦	٦ر١٦	٦ر٠٩	٦ر٠٤	٦ر٠٠	٥ر٩٦	٥ر٩١	٥ر٨٦	٥ر٨٠	٥ر٧٧	٥ر٧٥	٥ر٧٢	٥ر٦٩	٥ر٦٦	٥ر٦٣
٥	٦ر٦١	٥ر٧٩	٥ر٤١	٥ر١٩	٥ر٠٥	٤ر٩٥	٤ر٨٨	٤ر٨٢	٤ر٧٧	٤ر٧٤	٤ر٦٨	٤ر٦٢	٤ر٥٦	٤ر٥٣	٤ر٥٠	٤ر٤٦	٤ر٤٣	٤ر٤٠	٤ر٣٦
٦	٥ر٩٩	٥ر١٤	٤ر٧٦	٤ر٥٣	٤ر٣٩	٤ر٢٨	٤ر٢١	٤ر١٥	٤ر١٠	٤ر٠٦	٤ر٠٠	٣ر٩٤	٣ر٨٧	٣ر٨٤	٣ر٨١	٣ر٧٧	٣ر٧٤	٣ر٧٠	٣ر٦٧
٧	٥ر٥٩	٤ر٧٤	٤ر٣٥	٤ر١٢	٣ر٩٧	٣ر٨٧	٣ر٧٩	٣ر٧٣	٣ر٦٨	٣ر٦٤	٣ر٥٧	٣ر٥١	٣ر٤٤	٣ر٤١	٣ر٣٨	٣ر٣٤	٣ر٣٠	٣ر٢٧	٣ر٢٣
٨	٥ر٣٢	٤ر٤٦	٤ر٠٧	٣ر٨٤	٣ر٦٩	٣ر٥٨	٣ر٥٠	٣ر٤٤	٣ر٣٩	٣ر٣٥	٣ر٢٨	٣ر٢٢	٣ر١٥	٣ر١٢	٣ر٠٨	٣ر٠٤	٣ر٠١	٢ر٩٧	٢ر٩٣
٩	٥ر١٢	٤ر٢٦	٣ر٨٦	٣ر٦٣	٣ر٤٨	٣ر٣٧	٣ر٢٩	٣ر٢٣	٣ر١٨	٣ر١٤	٣ر٠٧	٣ر٠١	٢ر٩٤	٢ر٩٠	٢ر٨٦	٢ر٨٣	٢ر٧٩	٢ر٧٥	٢ر٧١
١٠	٤ر٩٦	٤ر١٠	٣ر٧١	٣ر٤٨	٣ر٣٣	٣ر٢٢	٣ر١٤	٣ر٠٧	٣ر٠٢	٢ر٩٨	٢ر٩١	٢ر٨٥	٢ر٧٧	٢ر٧٤	٢ر٧٠	٢ر٦٦	٢ر٦٢	٢ر٥٨	٢ر٥٤
١١	٤ر٨٤	٣ر٩٨	٣ر٥٩	٣ر٣٦	٣ر٢٠	٣ر٠٩	٣ر٠١	٢ر٩٥	٢ر٩٠	٢ر٨٥	٢ر٧٩	٢ر٧٢	٢ر٦٥	٢ر٦١	٢ر٥٧	٢ر٥٣	٢ر٤٩	٢ر٤٥	٢ر٤٠
١٢	٤ر٧٥	٣ر٨٩	٣ر٤٩	٣ر٢٦	٣ر١١	٣ر٠٠	٢ر٩١	٢ر٨٥	٢ر٨٠	٢ر٧٥	٢ر٦٩	٢ر٦٢	٢ر٥٤	٢ر٥١	٢ر٤٧	٢ر٤٣	٢ر٣٨	٢ر٣٤	٢ر٣٠
١٣	٤ر٦٧	٣ر٨١	٣ر٤١	٣ر١٨	٣ر٠٣	٢ر٩٢	٢ر٨٣	٢ر٧٧	٢ر٧١	٢ر٦٧	٢ر٦٠	٢ر٥٣	٢ر٤٦	٢ر٤٢	٢ر٣٨	٢ر٣٤	٢ر٣٠	٢ر٢٥	٢ر٢١
١٤	٤ر٦٠	٣ر٧٤	٣ر٣٤	٣ر١١	٢ر٩٦	٢ر٨٥	٢ر٧٦	٢ر٧٠	٢ر٦٥	٢ر٦٠	٢ر٥٣	٢ر٤٦	٢ر٣٩	٢ر٣٥	٢ر٣١	٢ر٢٧	٢ر٢٢	٢ر١٨	٢ر١٣
١٥	٤ر٥٤	٣ر٦٨	٣ر٢٩	٣ر٠٦	٢ر٩٠	٢ر٧٩	٢ر٧١	٢ر٦٤	٢ر٥٩	٢ر٥٤	٢ر٤٨	٢ر٤٠	٢ر٣٣	٢ر٢٩	٢ر٢٥	٢ر٢٠	٢ر١٦	٢ر١١	٢ر٠٧
١٦	٤ر٤٩	٣ر٦٣	٣ر٢٤	٣ر٠١	٢ر٨٥	٢ر٧٤	٢ر٦٦	٢ر٥٩	٢ر٥٤	٢ر٤٩	٢ر٤٢	٢ر٣٥	٢ر٢٨	٢ر٢٤	٢ر١٩	٢ر١٥	٢ر١١	٢ر٠٦	٢ر٠١
١٧	٤ر٤٥	٣ر٥٩	٣ر٢٠	٢ر٩٦	٢ر٨١	٢ر٧٠	٢ر٦١	٢ر٥٥	٢ر٤٩	٢ر٤٥	٢ر٣٨	٢ر٣١	٢ر٢٣	٢ر١٩	٢ر١٥	٢ر١٠	٢ر٠٦	٢ر٠١	١ر٩٦
١٨	٤ر٤١	٣ر٥٥	٣ر١٦	٢ر٩٣	٢ر٧٧	٢ر٦٦	٢ر٥٨	٢ر٥١	٢ر٤٦	٢ر٤١	٢ر٣٤	٢ر٢٧	٢ر١٩	٢ر١٥	٢ر١١	٢ر٠٦	٢ر٠٢	١ر٩٧	١ر٩٢
١٩	٤ر٣٨	٣ر٥٢	٣ر١٣	٢ر٩٠	٢ر٧٤	٢ر٦٣	٢ر٥٤	٢ر٤٨	٢ر٤٢	٢ر٣٨	٢ر٣١	٢ر٢٣	٢ر١٦	٢ر١١	٢ر٠٧	٢ر٠٣	١ر٩٨	١ر٩٣	١ر٨٨
٢٠	٤ر٣٥	٣ر٤٩	٣ر١٠	٢ر٨٧	٢ر٧١	٢ر٦٠	٢ر٥١	٢ر٤٥	٢ر٣٩	٢ر٣٥	٢ر٢٨	٢ر٢٠	٢ر١٢	٢ر٠٨	٢ر٠٤	١ر٩٩	١ر٩٥	١ر٩٠	١ر٨٤
٢١	٤ر٣٢	٣ر٤٧	٣ر٠٧	٢ر٨٤	٢ر٦٨	٢ر٥٧	٢ر٤٩	٢ر٤٢	٢ر٣٧	٢ر٣٢	٢ر٢٥	٢ر١٨	٢ر١٠	٢ر٠٥	٢ر٠١	١ر٩٦	١ر٩٢	١ر٨٧	١ر٨١
٢٢	٤ر٣٠	٣ر٤٤	٣ر٠٥	٢ر٨٢	٢ر٦٦	٢ر٥٥	٢ر٤٦	٢ر٤٠	٢ر٣٤	٢ر٣٠	٢ر٢٣	٢ر١٥	٢ر٠٧	٢ر٠٣	١ر٩٨	١ر٩٤	١ر٨٩	١ر٨٤	١ر٧٨

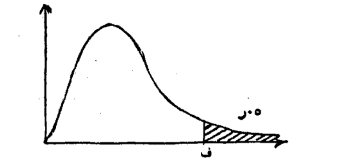
تابع جدول رقم (٤)

جدول توزيع ف (مستوى المعنوية = ٠٥ر)

ن٢ \ ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٦٠	١٢٠	∞
٢٣	٤ر٢٨	٣ر٤٢	٣ر٠٣	٢ر٨٠	٢ر٦٤	٢ر٥٣	٢ر٤٤	٢ر٣٧	٢ر٣٢	٢ر٢٧	٢ر٢٠	٢ر١٣	٢ر٠٥	٢ر٠١	١ر٩٦	١ر٩١	١ر٨٦	١ر٨١	١ر٧٦
٢٤	٤ر٢٦	٣ر٤٠	٣ر٠١	٢ر٧٨	٢ر٦٢	٢ر٥١	٢ر٤٢	٢ر٣٦	٢ر٣٠	٢ر٢٥	٢ر١٨	٢ر١١	٢ر٠٣	١ر٩٨	١ر٩٤	١ر٨٩	١ر٨٤	١ر٧٩	١ر٧٣
٢٥	٤ر٢٤	٣ر٣٩	٢ر٩٩	٢ر٧٦	٢ر٦٠	٢ر٤٩	٢ر٤٠	٢ر٣٤	٢ر٢٨	٢ر٢٤	٢ر١٦	٢ر٠٩	٢ر٠١	١ر٩٦	١ر٩٢	١ر٨٧	١ر٨٢	١ر٧٧	١ر٧١
٢٦	٤ر٢٣	٣ر٣٧	٢ر٩٨	٢ر٧٤	٢ر٥٩	٢ر٤٧	٢ر٣٩	٢ر٣٢	٢ر٢٧	٢ر٢٢	٢ر١٥	٢ر٠٧	١ر٩٩	١ر٩٥	١ر٩٠	١ر٨٥	١ر٨٠	١ر٧٥	١ر٦٩
٢٧	٤ر٢١	٣ر٣٥	٢ر٩٦	٢ر٧٣	٢ر٥٧	٢ر٤٦	٢ر٣٧	٢ر٣١	٢ر٢٥	٢ر٢٠	٢ر١٣	٢ر٠٦	١ر٩٧	١ر٩٣	١ر٨٨	١ر٨٤	١ر٧٩	١ر٧٣	١ر٦٧
٢٨	٤ر٢٠	٣ر٣٤	٢ر٩٥	٢ر٧١	٢ر٥٦	٢ر٤٥	٢ر٣٦	٢ر٢٩	٢ر٢٤	٢ر١٩	٢ر١٢	٢ر٠٤	١ر٩٦	١ر٩١	١ر٨٧	١ر٨٢	١ر٧٧	١ر٧١	١ر٦٥
٢٩	٤ر١٨	٣ر٣٣	٢ر٩٣	٢ر٧٠	٢ر٥٥	٢ر٤٣	٢ر٣٥	٢ر٢٨	٢ر٢٢	٢ر١٨	٢ر١٠	٢ر٠٣	١ر٩٤	١ر٩٠	١ر٨٥	١ر٨١	١ر٧٥	١ر٧٠	١ر٦٤
٣٠	٤ر١٧	٣ر٣٢	٢ر٩٢	٢ر٦٩	٢ر٥٣	٢ر٤٢	٢ر٣٣	٢ر٢٧	٢ر٢١	٢ر١٦	٢ر٠٩	٢ر٠١	١ر٩٣	١ر٨٩	١ر٨٤	١ر٧٩	١ر٧٤	١ر٦٨	١ر٦٢
٤٠	٤ر٠٨	٣ر٢٣	٢ر٨٤	٢ر٦١	٢ر٤٥	٢ر٣٤	٢ر٢٥	٢ر١٨	٢ر١٢	٢ر٠٨	٢ر٠٠	١ر٩٢	١ر٨٤	١ر٧٩	١ر٧٤	١ر٦٩	١ر٦٤	١ر٥٨	١ر٥١
٦٠	٤ر٠٠	٣ر١٥	٢ر٧٦	٢ر٥٣	٢ر٣٧	٢ر٢٥	٢ر١٧	٢ر١٠	٢ر٠٤	١ر٩٩	١ر٩٢	١ر٨٤	١ر٧٥	١ر٧٠	١ر٦٥	١ر٥٩	١ر٥٣	١ر٤٧	١ر٣٩
١٢٠	٣ر٩٢	٣ر٠٧	٢ر٦٨	٢ر٤٥	٢ر٢٩	٢ر١٧	٢ر٠٩	٢ر٠٢	١ر٩٦	١ر٩١	١ر٨٣	١ر٧٥	١ر٦٦	١ر٦١	١ر٥٥	١ر٥٠	١ر٤٣	١ر٣٥	١ر٢٥
∞	٣ر٨٤	٣ر٠٠	٢ر٦٠	٢ر٣٧	٢ر٢١	٢ر١٠	٢ر٠١	١ر٩٤	١ر٨٨	١ر٨٣	١ر٧٥	١ر٦٧	١ر٥٧	١ر٥٢	١ر٤٦	١ر٣٩	١ر٣٢	١ر٢٢	١ر٠٠

ملاحظة :

الجدول أعلاه يعطي قيمة ف عند مستوى المعنوية ٠٥ر المناظرة لدرجات الحرية ن١ ، ن٢ .



جـــــدول (٤)

جـــــدول توزيع ف (مستوى المعنوية ٠١ر)

ن٢ \ ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٦٠	١٢٠	∞
١	٤٠٥٢	٤٩٩٩٫٥	٥٤٠٣	٥٦٢٥	٥٧٦٤	٥٨٥٩	٥٩٢٨	٥٩٨٢	٦٠٢٢	٦٠٥٦	٦١٠٦	٦١٥٧	٦٢٠٩	٦٢٣٥	٦٢٦١	٦٢٨٧	٦٣١٣	٦٣٣٩	٦٣٦٦
٢	٩٨٫٥٠	٩٩٫٠٠	٩٩٫١٧	٩٩٫٢٥	٩٩٫٣٠	٩٩٫٣٣	٩٩٫٣٦	٩٩٫٣٧	٩٩٫٣٩	٩٩٫٤٠	٩٩٫٤٢	٩٩٫٤٣	٩٩٫٤٥	٩٩٫٤٦	٩٩٫٤٧	٩٩٫٤٧	٩٩٫٤٨	٩٩٫٤٩	٩٩٫٥٠
٣	٣٤٫١٢	٣٠٫٨٢	٢٩٫٤٦	٢٨٫٧١	٢٨٫٢٤	٢٧٫٩١	٢٧٫٦٧	٢٧٫٤٩	٢٧٫٣٥	٢٧٫٢٣	٢٧٫٠٥	٢٦٫٨٧	٢٦٫٦٩	٢٦٫٦٠	٢٦٫٥٠	٢٦٫٤١	٢٦٫٣٢	٢٦٫٢٢	٢٦٫١٣
٤	٢١٫٢٠	١٨٫٠٠	١٦٫٦٩	١٥٫٩٨	١٥٫٥٢	١٥٫٢١	١٤٫٩٨	١٤٫٨٠	١٤٫٦٦	١٤٫٥٥	١٤٫٣٧	١٤٫٢٠	١٤٫٠٢	١٣٫٩٣	١٣٫٨٤	١٣٫٧٥	١٣٫٦٥	١٣٫٥٦	١٣٫٤٦
٥	١٦٫٢٦	١٣٫٢٧	١٢٫٠٦	١١٫٣٩	١٠٫٩٧	١٠٫٦٧	١٠٫٤٦	١٠٫٢٩	١٠٫١٦	١٠٫٠٥	٩٫٨٩	٩٫٧٢	٩٫٥٥	٩٫٤٧	٩٫٣٨	٩٫٢٩	٩٫٢٠	٩٫١١	٩٫٠٢
٦	١٣٫٧٥	١٠٫٩٢	٩٫٧٨	٩٫١٥	٨٫٧٥	٨٫٤٧	٨٫٢٦	٨٫١٠	٧٫٩٨	٧٫٨٧	٧٫٧٢	٧٫٥٦	٧٫٤٠	٧٫٣١	٧٫٢٣	٧٫١٤	٧٫٠٦	٦٫٩٧	٦٫٨٨
٧	١٢٫٢٥	٩٫٥٥	٨٫٤٥	٧٫٨٥	٧٫٤٦	٧٫١٩	٦٫٩٩	٦٫٨٤	٦٫٧٢	٦٫٦٢	٦٫٤٧	٦٫٣١	٦٫١٦	٦٫٠٧	٥٫٩٩	٥٫٩١	٥٫٨٢	٥٫٧٤	٥٫٦٥
٨	١١٫٢٦	٨٫٦٥	٧٫٥٩	٧٫٠١	٦٫٦٣	٦٫٣٧	٦٫١٨	٦٫١٣	٥٫٩١	٥٫٨١	٥٫٦٧	٥٫٥٢	٥٫٣٦	٥٫٢٨	٥٫٢٠	٥٫١٢	٥٫٠٣	٤٫٩٥	٤٫٨٦
٩	١٠٫٥٦	٨٫٠٢	٦٫٩٩	٦٫٤٢	٦٫٠٦	٥٫٨٠	٥٫٦١	٥٫٤٧	٥٫٣٥	٥٫٢٦	٥٫١١	٤٫٩٦	٤٫٨١	٤٫٧٣	٤٫٦٥	٤٫٥٧	٤٫٤٨	٤٫٤٠	٤٫٣١
١٠	١٠٫٠٤	٧٫٥٦	٦٫٥٥	٥٫٩٩	٥٫٦٤	٥٫٣٩	٥٫٢٠	٥٫٠٦	٤٫٦٤	٤٫٨٥	٤٫٧١	٤٫٥٦	٤٫٤١	٤٫٣٣	٤٫٢٥	٤٫١٧	٤٫٠٨	٤٫٠٠	٣٫٩١
١١	٩٫٦٥	٧٫٢١	٦٫٢٢	٥٫٦٧	٥٫٣٢	٥٫٠٧	٤٫٨٩	٤٫٧٤	٤٫٦٣	٤٫٥٤	٤٫٤٠	٤٫٢٥	٤٫١٠	٤٫٠٢	٣٫٩٤	٣٫٨٦	٣٫٧٨	٣٫٦٩	٣٫٦٠
١٢	٩٫٣٣	٦٫٩٣	٥٫٩٥	٥٫٤١	٥٫٠٦	٤٫٨٢	٤٫٦٤	٤٫٥٠	٤٫٢٩	٤٫٣٠	٤٫١٦	٤٫٠١	٣٫٨٦	٣٫٧٨	٣٫٧٠	٣٫٦٢	٣٫٥٤	٣٫٤٥	٣٫٣٦
١٣	٩٫٠٧	٦٫٧٠	٥٫٧٤	٥٫٢١	٤٫٨٦	٤٫٦٢	٤٫٤٤	٤٫٣٠	٤٫١٩	٤٫١٠	٣٫٩٦	٣٫٨٢	٣٫٦٦	٣٫٥٩	٣٫٥١	٣٫٤٣	٣٫٣٤	٣٫٢٥	٣٫١٧
١٤	٨٫٨٦	٦٫٥١	٥٫٥٦	٥٫٠٤	٤٫٦٩	٤٫٤٦	٤٫٢٨	٤٫١٤	٤٫٠٣	٣٫٩٤	٣٫٨٠	٣٫٦٦	٣٫٥١	٣٫٤٣	٣٫٣٥	٣٫٢٧	٣٫١٨	٣٫٠٩	٣٫٠٠
١٥	٨٫٦٨	٦٫٣٦	٥٫٤٢	٤٫٨٩	٤٫٥٦	٤٫٣٢	٤٫١٤	٤٫٠٠	٣٫٨٩	٣٫٨٠	٣٫٦٧	٣٫٥٢	٣٫٣٧	٣٫٢٩	٣٫٢١	٣٫١٣	٣٫٠٥	٢٫٩٦	٢٫٨٧
١٦	٨٫٥٣	٦٫٢٣	٥٫٢٩	٤٫٧٧	٤٫٤٤	٤٫٢٠	٤٫٠٣	٣٫٨٩	٣٫٧٨	٣٫٦٩	٣٫٥٥	٣٫٤١	٣٫٢٦	٣٫١٨	٣٫١٠	٣٫٠٢	٢٫٩٣	٢٫٨٤	٢٫٧٥
١٧	٨٫٤٠	٦٫١١	٥٫١٨	٤٫٦٧	٤٫٣٤	٤٫١٠	٣٫٩٣	٣٫٧٩	٣٫٦٨	٣٫٥٩	٣٫٤٦	٣٫٣١	٣٫١٦	٣٫٠٨	٣٫٠٠	٢٫٩٢	٢٫٨٣	٢٫٧٥	٢٫٦٥
١٨	٨٫٢٩	٦٫٠١	٥٫٠٩	٤٫٥٨	٤٫٢٥	٤٫٠١	٣٫٨٤	٣٫٧١	٣٫٦٠	٣٫٥١	٣٫٣٧	٣٫٢٣	٣٫٠٨	٣٫٠٠	٢٫٩٢	٢٫٨٤	٢٫٧٥	٢٫٦٦	٢٫٥٧
١٩	٨٫١٨	٥٫٩٣	٥٫٠١	٤٫٥٠	٤٫١٧	٣٫٩٤	٣٫٧٧	٣٫٦٣	٣٫٥٢	٣٫٤٣	٣٫٣٠	٣٫١٥	٣٫٠٠	٢٫٩٢	٢٫٨٤	٢٫٧٦	٢٫٦٧	٢٫٥٨	٢٫٤٩
٢٠	٨٫١٠	٥٫٨٥	٤٫٩٤	٤٫٤٣	٤٫١٠	٣٫٨٧	٣٫٧٠	٣٫٥٦	٣٫٤٦	٣٫٣٧	٣٫٢٣	٣٫٠٩	٢٫٩٤	٢٫٨٦	٢٫٧٨	٢٫٦٩	٢٫٦١	٢٫٥٢	٢٫٤٠
٢١	٨٫٠٢	٥٫٧٨	٤٫٨٧	٤٫٣٧	٤٫٠٤	٣٫٨١	٣٫٦٤	٣٫٥١	٣٫٤٠	٣٫٣١	٣٫١٧	٣٫٠٣	٢٫٨٨	٢٫٨٠	٢٫٧٠	٢٫٦٤	٢٫٥٥	٢٫٤٦	٢٫٣٦
٢٢	٧٫٩٥	٥٫٧٢	٤٫٨٢	٤٫٣١	٣٫٩٩	٣٫٧٦	٣٫٥٩	٣٫٤٥	٣٫٣٥	٣٫٢٦	٣٫١٢	٢٫٩٨	٢٫٨٣	٢٫٧٥	٢٫٦٧	٢٫٥٨	٢٫٥٠	٢٫٤٠	٢٫٣١
٢٣	٧٫٨٨	٥٫٦٦	٤٫٧٦	٤٫٢٦	٣٫٩٤	٣٫٧١	٣٫٥٤	٣٫٤١	٣٫٣٠	٣٫٢١	٣٫٠٧	٢٫٩٣	٢٫٧٨	٢٫٧٠	٢٫٦٢	٢٫٥٤	٢٫٤٥	٢٫٣٥	٢٫٢٦

تابع جدول (٤)

جدول توزيع ف (مستوى المعنوية ٠١ر)

ن٢ \ ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٦٠	١٢٠	
٢٤	٧ر٨٢	٥ر٦١	٤ر٧٢	٤ر٢٢	٣ر٩٠	٣ر٦٧	٣ر٥٠	٣ر٣٦	٣ر٢٦	٣ر١٧	٣ر٠٣	٢ر٨٩	٢ر٧٤	٢ر٦٦	٢ر٥٨	٢ر٤٩	٢ر٤٠	٢ر٣١	٢ر٢١
٢٥	٧ر٧٧	٥ر٥٧	٤ر٦٨	٤ر١٨	٣ر٨٥	٣ر٦٣	٣ر٤٦	٣ر٣٢	٣ر٢٢	٣ر١٣	٢ر٩٩	٢ر٨٥	٢ر٧٠	٢ر٦٠	٢ر٥٤	٢ر٤٥	٢ر٣٦	٢ر٢٧	٢ر١٧
٢٦	٧ر٧٢	٥ر٥٣	٤ر٦٤	٤ر١٤	٣ر٨٢	٣ر٥٩	٣ر٤٢	٣ر٢٩	٣ر١٨	٣ر٠٩	٢ر٩٦	٢ر٨١	٢ر٦٦	٢ر٥٨	٢ر٥٠	٢ر٤٢	٢ر٣٣	٢ر٢٣	٢ر١٣
٢٧	٧ر٦٨	٥ر٤٩	٤ر٦٠	٤ر١١	٣ر٧٨	٣ر٥٦	٣ر٣٩	٣ر٢٦	٣ر١٥	٣ر٠٦	٢ر٩٣	٢ر٧٨	٢ر٦٣	٢ر٥٥	٢ر٤٧	٢ر٣٨	٢ر٢٩	٢ر٢٠	٢ر١٠
٢٨	٧ر٦٤	٥ر٤٥	٤ر٥٧	٤ر٠٧	٣ر٧٥	٣ر٥٣	٣ر٣٦	٣ر٢٣	٣ر١٢	٣ر٠٣	٢ر٩٠	٢ر٧٥	٢ر٦٠	٢ر٥٢	٢ر٤٤	٢ر٣٥	٢ر٢٦	٢ر١٧	٢ر٠٦
٢٩	٧ر٦٠	٥ر٤٢	٤ر٥٤	٤ر٠٤	٣ر٧٣	٣ر٥٠	٣ر٣٣	٣ر٢٠	٣ر٠٩	٣ر٠٠	٢ر٨٧	٢ر٧٣	٢ر٥٧	٢ر٤٩	٢ر٤١	٢ر٣٣	٢ر٢٣	٢ر١٤	٢ر٠٣
٣٠	٧ر٥٦	٥ر٣٩	٤ر٥١	٤ر٠٢	٣ر٧٠	٣ر٤٧	٣ر٣٠	٣ر١٧	٣ر٠٧	٢ر٩٨	٢ر٨٤	٢ر٧٠	٢ر٥٥	٢ر٤٧	٢ر٣٩	٢ر٣٠	٢ر٢١	٢ر١١	٢ر٠١
٤٠	٧ر٣١	٥ر١٨	٤ر٣١	٣ر٨٣	٣ر٥١	٣ر٢٩	٣ر١٢	٢ر٩٩	٢ر٨٩	٢ر٨٠	٢ر٦٦	٢ر٥٠	٢ر٣٧	٢ر٢٩	٢ر٢٠	٢ر١١	٢ر٠٢	١ر٩٢	١ر٨٠
٦٠	٧ر٠٨	٤ر٩٨	٤ر١٣	٣ر٦٥	٣ر٣٤	٣ر١٢	٢ر٩٥	٢ر٨٢	٢ر٧٢	٢ر٦٣	٢ر٥٠	٢ر٣٥	٢ر٢٠	٢ر١٢	٢ر٠٣	١ر٩٤	١ر٨٤	١ر٧٣	١ر٦٠
١٢٠	٦ر٨٥	٤ر٧٩	٣ر٩٥	٣ر٤٨	٣ر١٧	٢ر٩٦	٢ر٧٩	٢ر٦٦	٢ر٥٦	٢ر٤٧	٢ر٣٤	٢ر١٩	٢ر٠٣	١ر٩٥	١ر٨٦	١ر٧٦	١ر٦٦	١ر٥٣	١ر٣٨
∞	٦ر٦٣	٤ر٦١	٣ر٧٨	٣ر٣٢	٣ر٠٢	٢ر٨٠	٢ر٦٤	٢ر٥١	٢ر٤١	٢ر٣٢	٢ر١٨	٢ر٠٤	١ر٨٨	١ر٧٩	١ر٧٠	١ر٥٩	١ر٤٧	١ر٣٢	١ر٠٠

المراجع

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع في الاحصاء الوصفي والتحليلي، والقائمة مرتبة ترتيباً أبجدياً حسب أسماء المؤلفين :

أولاً : المراجع العربية :

* **د. أحمد عباده سرحان**

طرق التحليل الاحصائي ـ دار المعارف ـ مصر ـ ١٩٦٣ .

* **د. أحمد محمد عمر، د. عبداللطيف عبدالفتاح**

مقدمة الطرق الاحصائية ـ مطبعة التقدم ـ القاهرة ـ ١٩٧٨

* **اسماعيل العوامري**

مبادىء الاحصاء ـ مكتبة عين شمس ـ ١٩٨١

* **د. سمير كامل عاشور**

مقدمة في الاحصاء الوصفي والتحليلي ـ معهد الاحصاء ـ القاهرة ١٩٨٠

* **د. عبدالمجيد فراج**

الأسلوب الاحصائي ـ دار النهضة العربية ـ مصر ـ ١٩٧١ .

ثانياً : المراجع الأجنبية

* **Freund, J. E.**
  Modern elementary statistics, 5th edition, Prentice/Hall, 1979.

* **Sincich, T.**
  Statistics by examples, Dellen publishing company, San-Francisco, 1985.

* **Mansfield, E.**
  Basic statistics with applications, W. W. Norton and company, New York, 1986.

* **Matie. J. Q. and Gilbereath, G. H.**
  Statistics for Business and Economics, Business publication, Dallas, U. S. A., 1980.

* **Mendenhall, W. and Sincich, T.**
  A second course in Business statistics, Dellen publishing Company, San Francisco, 1986.

* **Walpole, R. E.**
  Introduction to Statistics, second edition, Macmillan publishing Co., Inc., New York, 1974.

شركة مطابع الوزان العالمية ح م م
٤٧٤٧٣٧٤ - ٤٧٣١٩٦٤